(Busse 18
OHF

Bündige und reine Darstellung

des

wahrhaften

Infinitesimal-Calculs

wie sie

besonders auch für wissenschaftliche Praktiker

rathsam ist.

Von

Friedrich Gottlieb von Busse,

Doctor honorar. der Königl. Preufsischen Universität Halle, Prof. honorar. der Kaiserl. Russischen Universität Wilna, Berg-Commissionsrath und Professor der Physik, auch höhern Mathematik und Bergmaschinen-Lehre an der Kön. Sächs. Bergakademie, Senator im Rathe und Assessor im Bergschöppenstuhle zu Freyberg; mehrer gelehrt. Gesellsch. Mitgliede.

Dritter und letzter Band.

Integralrechnung,

mit IVter und Vter Kupfertafel.

Dresden, 1827,

in der Arnoldischen Buchhandlung.

Vorrede.

1) Wenn Ein Bernoulli [1]) nach ernstlicher Untersuchung der Sache behauptet, daſs der Hauptsatz unserer ganzen höhern Mechanik vielleicht nur zufällig wahr, und daher *a priori* erweisbar nicht seyn möchte; Ein Euler mit seinem Gegenbeweise allerdings unbefriedigend blieb, daher ein d'Alembert für rathsam hielt, den Hauptsatz der Mechanik als eine bloſse Definition der beschleunigenden Kraft hypothetisch zu gebrauchen [2]) (folglich von seiner ganzen Dynamik nur behaupten kann, daſs sie für diejenigen Kräfte, welchen seine Definition wirklich zukommt, gültig und wahr sey); wenn Ein Kästner angelegentlich darüber sich zu erörtern sucht, am Ende aber selbst nicht gewiſs ist, ob er wirklich überzeugend geworden sey [3]); alle diese ausgezeichnet scharfsinnigen Mathematiker also, vermittelst ihres Infinitesimalcalculs, unsere allgemein gebrauchte Dynamik, als nothwendig wahr nicht zu begründen wuſsten; ein Geometer der neuern Zeit,

---

[1]) Daniel Bernoulli in seiner Abhandlung, *Examen principiorum Mechanicae*, *No. I. et No. IV. in Commentariis Acad. scient. Petropol. Tom. I.* 1728. *pag.* 127 *et* 129.

[2]) *Traité de dynamique. Paris* 1743. §. 19. *pag.* 87.

[3]) Anfangsgründe der höhern Mechanik, zweite Aufl. Göttingen 1793. §. 78. Seite 87.

dessen *Mécanique céleste* im Ganzen genommen, Staunen und Ehrfurcht für die Gröfse seines Geistes erregen mufs, eben diesen Hauptsatz der Dynamik lediglich durch Erfahrung auf unserer Erde, folglich auch nicht als allgemein und nothwendig für jede stetig wirkende Kraft, als solche, zu erweisen sucht [4])!

2) Wenn Euler eine sehr berühmt gewordene Aufgabe der höhern Mechanik, vermittelst des Infinitesimal-Calculs, auffallend seltsam, durch zweierlei Methoden übereinstimmend, beantwortet fand, und dann fast ein Jahrhundert hindurch die berühmtesten Mathematiker aller Orten hin und her darüber versuchten, gleichwohl durch ein bündiges und folgerecht scheinendes Differenziiren und Integriren auch nicht einer diejenige Antwort hervorzubringen wufste, welche, ohne Calcul, jedem übrigens sachverständigen und wissenschaftlichen Urtheile klar und deutlich sich aufdringen mufste, und eben deshalb so vielerlei calculatorische Angriffe versucht wurden, obgleich freilich Euler im ganzen Ernste geäufsert hatte, dafs wir bei einem so offenbaren Widerspruche zwischen dem Calcul und unserer Urtheilskraft, dem ersteren mehr als der letzteren trauen müfsten [5])!

3) Wenn die Infinitesimalisten darüber einig waren, dafs die von ihnen als allgemein richtig erwiesene Differenziirungsregel in einigen einzelen Fällen etwas unrichtiges gebe, über welche dann eine Special-Inquisition angestellt werden müsse [6])!

4) Wenn sie, ihre Begriffe vom Unendlichgrofsen und Unendlichkleinen für die Algebra gebraucht, den

---

[4]) *Laplaçe Mécanique céleste. T. I. Livre I. (Chap. II.) No.* 5.

[5]) Man sehe Diff.R. Band 1. Vorerinner. VII. §. 8. und Hesperus 1820. No. 18.

[6]) *Formulae radii osculatoris etc. Dresdae* 1825, *pag.* 141

Satz behaupteten, daſs bejahte Gröſsen, nachdem sie unendlich groſs geworden seyen, ins verneinte übergehen müſsten, also namentlich auch von einigen verneinten Einheiten (einigen -1) zu behaupten sey, daſs sie gröſser als o seyen, indeſs die übrigen, dem algebraischen Maaſssysteme gemäſs um $+1$ kleiner als o nothwendig seyn müssen [7])!

5) Wenn sie bei solchem Uebergange durch das bejahte Unendlichgroſs, eines überschrittenen, also auch völlig erreicht gewesenen Unendlichgroſsen offenbar eingeständig sind, und gleichwol anderweitig unter unendlich groſs etwas anderes, als eine immerfort noch wachsende Gröſse zu fordern, und mit völligem Bewuſstseyn zu gebrauchen, nicht wagen wollen!

6) Wenn sie eben deshalb, in ihrem Infinitesimalcalcul, kein dem $=$ o entsprechendes $\frac{1}{\infty}$, sondern nur ein unendlich klein werdendes, nach unsērer Bezeichnung allemal nur ein $\frac{1}{\propto}$, aufzuweisen haben, und gleichwol der o selbst, schon in der gemeinen Arithmetik nicht, noch weniger aber in der algebraischen Maaſsleiter entbehren können, auch von jedem unendlich kleinen Differential einer stetigen Gröſse mit Recht behaupten, daſs es calculatorisch, anders nicht als durch $=$ o angeblich seyn kann!

7) Wenn die Infinitesimalisten zwar eigentlich der Meinung geblieben scheinen und seyn muſsten, daſs die durch Integrirung gesuchte Function, die volle und genaue Summe der unendlich vielen Functions-Differentialen seyn müsse, diese Meinung aber nur in so wenigen einzelen Fällen erweisbar fanden, daſs sie lieber die Definition des Integrales umändern,

---

[7]) Integral-R. Vorerinner. XIII. §. 3.

und darunter bloſs diejenige Function verstehen wollen, welche differenziirt, das vorgegebne Differential wieder gebe; also statt einer unmittelbaren Ansicht der Sache, mit dem für stetige Gröſsen nur Näherungsweise messenden Zahlensysteme sich begnügen *)!

8) Wenn man (die vielen seit Jahren gefertigten Lehrbücher beseitigt, durch welche es deutlich erwiesen wird, daſs ihre Verfasser so eben etwas höhere Mathematik zu erlernen versucht haben) selbst auch bei den Meistern der Wissenschaft nicht selten auf Ausdrücke und Folgerungen trifft, welche undeutlich sind und bleiben müssen:

so ist es wohl zu erklären, daſs mehre denkende Männer, bald so bald anders, an der Methodik des höhern Calculs zu bessern suchten.

Ein Analyst der ersten Gröſse, der sein ganzes Leben dem abstracten Calcul zu widmen Lust und Erlaubnis hatte, auch namentlich durch die erste Entdeckung des Variations-Calculs, und andere, mehr oder weniger damit verwandte, neue Blicke in die höhere Analyse, um die Erweiterung dieser Wissenschaft sich sehr verdient gemacht hat, faſste die sonderbare Meinung, daſs wir darauf Verzicht leisten müſsten, den Infinitesimal-Calcul aus Begriffen des Unendlichgroſsen und Unendlichkleinen unmittelbar herzuleiten, ſondern nur die Resultate dieses Calculs, durch Behandlung endlicher Gröſsen, und somit, nach seinem eigenen Ausdrucke, so bündig und so strenge, als die Sätze eines Euklid, müſsten zu erweisen suchen.

Man lese folgende Stelle in Eulers Abhandlung, *De seriebus divergentibus*, §. 11. *Quoties in analysi ad expressionem vel fractam, vel transcendentem, pertingimus; toties eam in idoneam se-*

*) Integral-R. Cap. III. §. 53.

riem convertere solemus, ad quam sequens calculus commodius applicari queat. Eatenus ergo tantum series infinitae in analysi locum inveniunt, quatenus ex evolutione cujuspiam expressionis finitae sunt ortae; et hanc ob rem in calculo semper loco cujusque seriei infinitae eam formulam, ex cujus evolutione est nata, substituere licet [*]. *Hinc quemadmodum summo cum fructu regulae tradi solent, expressiones finitas, sed forma minus idonea praeditas, in series infinitas convertendi, ita vicissim utilissimae sunt censendae regulae, quarum ope, si proposita fuerit series infinita quaecunque, ea expressio finita investigari queat, ex qua ea resultet; et cum haec expressio, semper sine errore loco seriei infinitae substitui possit, necesse est, ut utriusque idem sit valor; ex quo efficitur, nullam dari seriem infinitam, quin simul expressio finita illi aquivalens concipi quaeat.*

Man habe diese Stelle durchlesen, und man wird sich überzeugt halten müssen, daſs gerade diese Aeusserungen Eulers bei Lagrange den Entwurf zu seiner *Theorie des fonctions* veranlaſst haben.

Mein Urtheil über diese Theorie, als Surrogat und Usurpator des Infinitesimal-Calculs betrachtet, wie es im Hesperus 1823, No. 271 S. 1081, gedruckt steht, muſs ich allerdings aus der dortigen Veranlassung durch meinen damaligen Gegner, und als eine bloſse Erinnerung dessen zu betrachten bitten, was ich vor etwa 45 Jahren, bei der ersten Ausgabe dieser Theorie geurtheilt hatte. Nachdem ich dage-

---

*) Noch etwas mehres von Eulers hieher gehörigen Aeusserungen habe ich in Vorerinnerung XIII. §. 6 und 7. übersetzt, und aus dort angegebnen Gründen insbesondere das Recht bezweifelt, allemal die Mutter statt der Tochter belangen zu können.

gen späterhin die neue sehr verbesserte Ausgabe zur Hand nahm, bin ich allerdings der Meinung geworden, daſs dieses Werk Eines Lagrange, für diejenigen, die mit den Schlüssen und Resultaten des Infinitesimal-Calculs, durch dessen wahrhafte Gründe, schon gehörig bekannt geworden sind, nicht nur unschädlich seyn kann, sondern auch durch manche sehr nette Verbindung und Ueberschauung jener schon bekannten, und gehörig erlernten Resultate, dem darin Geübten angenehm und nützlich werden könne.

In Frankreich, wo man des ehrwürdigen *Carnot Réflections sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, für die beste mögliche Rechtfertigung dieses Calculs achtete, welche gleichwol nicht sehr befriedigen konnte, muſste es sehr willkommen seyn, daſs man alle Resultate desselben, durch Reihenbetrachtung und Functionen-Entwickelung, als eine Analysis endlicher Gröſsen solle gewinnen können.

Ein Lacroix und andere Lehrer der höhern reinen Mathematik, wuſsten sehr schicklich von der neuen, hie und da sehr bequemen und anstelligen Sprache des Functionen-Calculs, und einigen sehr scharfsinnigen Combinirungen desselben, Gebrauch zu machen, ohne die wahren Gründe des Unendlichen zu verläugnen, oder absichtlich zu verstekken; und übrigens liegt es ja auch durch die Lehrbücher Eines Euler, von Segner, Karsten, Kästner, Pasquich, L'Huillier, Bohnenberger, Mayer und einiger andern teutschen Mathematiker, allerdings vor Augen, daſs man, besonders für die reine höhere Mathematik, ziemlich consequent und haltbar scheinende Systeme aufstellen kann, ohne dabei an die unter No. 6; 7 und 8; von uns erwähnten Schwierigkeiten merklich erinnert zu werden, oder z. B. die allgemein gelehrte Specialinquisition No. 3 nothwendig als falsch beachten zu müssen.

Diejenigen französischen Mathematiker, welche für die höhere angewandte Mathematik, und namentlich für die Astronomie, in dem höchsten, abstractesten Calcul bewundernswürdig fortarbeiteten, hielten es, um die unmittelbaren Gründe des Infinitesimalcalculs sorgfältig sich zu bekümmern, nicht ferner für nothwendig, da sie nur, des leichten und bequemen Mechanismus wegen, seiner Gleichungen, Formeln und Ausdrücke sich bedienen wollten, deren Richtigkeit übrigens ja durch den Functionen-Calcul bündig erwiesen sey! — Welches aber die üble Folge, selbst auch bei den gröſsten Meistern in dieser Wissenschaft gehabt hat, daſs sie sich dieser Formeln und Ausdrücke mit übermäſsiger Zutraulichkeit, und zum Theil mit einer wirklich verworrenen Ausdeutung bedient haben; dergleichen sich ein wahrhafter teutscher Infinitesimalist nicht erlauben würde, weil er aus den wahren Gründen dieser Formeln und Ausdrücke, auch auf ihre wahre Bedeutung zu schlieſsen weiſs [10]).

Sollte mir hier die Frage vorgelegt werden, welchen Infinitesimalisten ich hier verstehe? denjenigen, der von den Differentialen mit Euler und D'Alembert behauptet, daſs sie eine völlige o geworden seyn sollen, oder denjenigen, der mit den meisten übrigen Lehrern behauptet, daſs kein Differential ein völliges Nichts geworden seyn könne und müsse! so hoffe ich, daſs diese Frage nicht mehr statt finden könne, nachdem ich dargelegt zu haben glaube, daſs man beides, mit und neben einander zu behaupten veranlaſst und berechtigt sey; indem ja in der Diffe-

10) In den Nöthigsten Lehren der allgemeinen Maschinenmechanik, werde ich auffallende Beispiele davon nützlich zu erörtern suchen; wie es gar wohl mit meiner wärmsten Verehrung jener Meister bestehen kann, denen ich viel zu verdanken habe.

rentialrechnung (wo man die genaue Gröfse der Differentialquotienten calculatorisch zu finden verlangt, auch die vorgelegte Aufgabe durch diese Gröfsen allein genommen völlig beantwortet wird) allerdings z. B. im $\frac{dX}{dx} = p$, sowol dx als dX, calculatorisch anders nicht, als durch = 0 angegeben werden kann und mufs (Diff.R. an mehren Orten); in der Integralrechnung dagegen, wo man aus der Form eines $dX = p\,dx$ auf $X = \int p\,dx$ zu schliefsen sucht, eben so nothwendig in Betracht zu ziehen ist, dafs dx, als Differential der stetigen Gröfse x, immerfort noch ein untheilbares Element der stetigen Gröfse x, als einer solchen, geblieben seyn müsse, u. s. w. (Integr.R. C. III u. S. LXIV.) Durch die einsichtsvolle Recension meiner Differ. Rechnung Band 1, in den Göttingischen gelehrten Anzeigen 1826, B. I No. 83, darauf aufmerksam gemacht, dafs ich auch schon in der Differentialrechnung, ausser dem dort hauptsächlich zu beachtenden calculatorischem Nichts, auch das elementarische Etwas der Differentiale, ausdrücklicher hätte erwähnen (und zur anschaulichen Erklärung der Zahlgröfse p benutzen) sollen, würde ich in dieser Hinsicht ein besonderes Kapitel am Ende dieses Bandes hinzugefügt haben, wenn ich nicht der Meinung geblieben wäre, dafs die sämmtliche hieher gehörige Betrachtung der Infinitesimalien am anschaulichsten und reichhaltigsten in der nächstbevorstehenden Behandlung der höhern Mechanik sich darstellen lasse, wo ich aufser den stetigen geometrischen Gröfsen, auch die stetigen Gröfsen der Zeit, der Bewegung, und der stetig wirkend gedachten, unveränderlichen und veränderlichen Kräfte, benutzen kann.

Bin ich mit Recht der Meinung gewesen, dafs alles, was in den bisherigen Lehrsystemen der Infi-

nitesimalrechnung hie und da undeutlich und anstöſsig seyn muſste, schlechterdings nur durch eine genauere Erörterung und Benutzung ihrer eigenthümlichen Gründe sich richtig und treffend könne beurtheilen lassen: so hatte ich auch Recht, namentlich für die hiesigen Bergakademisten, diese höheren Methoden aus ihren wahren Gründen unmittelbar zu folgern. Und damit würde ich fernerhin, ohne mich so angelegentlich gegen das neue, so genannte französische Lehrsystem zu erklären, allerdings in der Stille um so mehr haben fortfahren können, je mehr und mehr es ja auch in Teutschland schon bekannt geworden war, daſs die meisten französichen Mathematiker selbst, die unsicheren und trüglichen Darstellungen des Hrn. Lagrange zu verlassen, für nothwendig anerkannten. Schon in des Hrn. Lacroix *Traité du Calc. intégrale* sind einige dahin gehörige Winke zu bemerken. Namentlich in des Hrn. Cauchy *Resumé des leçons sur le Calcul infinitésimal, Paris*, 1823, heiſst es, wie folget. *Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la Mécanique analitique a pris la Formule de Taylor pour la base* [11]) *de sa théorie des Fonctions derivées. Mais, malgré tout le respect. que commande une si grande autorité, le plûpart des géometres s'accordent maintenant, à reconnaitre l'incertitude des resultats, auxquels on peut être conduit, par l'emploi des séries divergentes, et nous ajouterons, que dans plusieurs cas le theorème de Taylor semble fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement*

[11]) Zum Erweise dieser Basis hat er eines zweimaligen Gebrauches seiner so genannten allgemeinen Entwickelungsreihe nöthig, von welcher es in Teutschland bald genug erwiesen wurde, daſs sie nicht allgemein anstellig sey!

de la fonction proposée. Au reste, ceux, qui liront mon ouvrage, se convaincront, je l'espère, que les principes du Calcul differentiel, et ses applications les plus importantes peuvent être facilement exposée, sans l'entrevention des séries etc.; wie es doch wohl in vielen teutschen Lehrbüchern leichter und einfacher, als in dieser von einem berühmten Lehrer hier aufgestellten Rückkehr zur ältern Methode geleistet seyn dürfte!

Da nun aber dessen ungeachtet in Teutschland von einigen sehr achtungswürdigen Lehrern es laut geäufsert, und von mehren es nachgestammelt wurde, dafs man in der Wissenschaft mit der Zeit fortgehen, die (so genannte) schlüpfrige Theorie vermittelst des Unendlichen verlassen, und das Lehrsystem des Hrn. Lagrange mit ergreifen müsse; da denn ferner einige der jüngeren Lehrer, um sich eine eigenthümliche Geltung zu verschaffen, zu versichern wagten, dafs sie selbst auch mit uns ältern, viele Jahre lang im Dunkel umher getaumelt wären, durch die neue Methode aber ein sonnenhelles Licht ihnen aufgegangen sey, indefs wir freilich, als gar zu alte Männer, immer noch einer längst veralterten, völlig aus der Mode gekommenen Methode treu zu bleiben suchten: so habe ich, als einer der ältesten unter denen veralterten Lehrern, welche mehr zu denken als zu rechnen pflegen, mich bereit zeigen wollen, unsre alte, von Leibnitz eröffnete Infinitesimalrechnung, gegen die neueren Finalisten öffentlich in Schutz zu nehmen.

Gesetzt, es wäre dem eminenten Talente Eines Lagrange besser, als es wirklich geschehen ist, gelungen, das Infinitesimalsystem entbehrlich zu machen: so wäre doch dagegen zu bedenken, dafs dieses System der stetigen Grofsen wegen erfunden ist (Integral-R. an mehren Orten), und es jedem mathe-

matischen Denker sehr anstöfsig seyn mufs, dafs es ihm auferlegt seyn soll, von dem so wesentlichen Unterschiede zwischen den stetigen Gröfsen und dem diskreten Zahlensysteme, *mit gutem Willen und deutlichem Wissen*, keine Notiz zu nehmen!

Ferner ist es einleuchtend, dafs der so genannte Functionen-Calcul, viele Kenntnifs und Uebung in den abstractesten Theilen des Calculs und der Reihen-Vergleichung voraussetzt. Kenntnisse und Uebungen, die viele Zeit und Anstrengung erfordern; folglich auch den Verstand des Calculators, als eines solchen, schärfen können! das ist nicht zu läugnen. Aber bekannt genug ist es auch, dafs manche Mathematiker, die ungemein viele Kenntnisse des Calculs besitzen, und vermöge eines treuen Formelngedächtnisses mit bewundernswürdiger Fertigkeit darin zu verfahren wissen, gerade sehr auffallend unschicklich sich zu benehmen pflegen, wenn sie auf Mechanik, oder andere Bedürfnisse des gemeinen Lebens ihren Calcul anwenden sollen oder wollen! Und, wie es selbst auch bei der Untersuchung eines rein calculatorischen Gegenstandes den geübtesten neueren Calculatoren ergehen könne; darüber wird man aus den allerneuesten calculatorischen Zeiten, vom Jahre 1811 bis 1827, in dem XVIIIten Kapitel ein warnendes Beispiel aufgestellt finden.

Wenn solche ausgezeichnete Mathematiker, als an dieser beabsichtigten Verbesserung des Winkel-Calculs diese 15 Jahr hindurch gearbeitet haben, und zwar gröfstentheils solche Mathematiker, die den gröfsten Theil ihres Lebens gerade der reinen Mathematik und deren höherem Calcul scheinen gewidmet zu haben, gleichwohl während ihrer Functionen-Behandlung in so unpassenden Ansichten verbleiben und in so irrige Behauptungen gerathen konnten, als z. B. aus §. 49; 51; 53 und 54; auch 66, des

angeführten Kapitels es abzunehmen ist: so wird man auch durch solche Beispiele sich überzeugt finden, dafs künftige Praktiker in angewandter Mathematik, wo man noch weit mehr, als in der reinen Mathematik, auf die Mannigfaltigkeit der Gegenstände selbst zu achten hat, nicht auf solchen mühseligen calculatorischen Umwegen ihr Heil suchen müssen.

Man bedenke nun überdies, unter welchen Umständen ich mein hiesiges Lehramt vor nunmehr 27 Jahren anzutreten hatte. Aufser den Professuren der so genannten reinen (der Elementar-) Mathematik, der so genannten angewandten Mathematik (den Grundlehren der statischen Wissenschaften und der von mir so genannten Experimental-Hydraulik), der theoretischen und experimentalen Physik, hatte ich auch die Professur der Bergmaschinenlehre übernommen. Ich erklärte sogleich, dafs man dieser gegenwärtig, ohne etwas höhere Mathematik, namentlich etwas Differential- und Integralrechnung vorangeschickt zu haben, nicht Genüge thun könne.

In den Vorlesungen über höhere Mathematik und Bergmaschinenlehre, zusammen wöchentlich 5 Stunden, und etwa 10 Monate hindurch dauernd, pflegte ich nun vorläufig etwa 5 Monate darauf zu verwenden, um discursivisch einige Uebersicht von der algebraischen Behandlung der höheren Gleichungen zu geben, dann etwas mehr von der analytischen Geometrie, auf Kegelschnitte und einige andere Curven angewandt, einige Theorie der Reihen, auch etwas analytische Trigonometrie hinzuzufügen, und nunmehr von den nöthigsten Lehren der Differential- und Integralrechnung nur so viel voran zu schicken, dafs ich in den übrigen 5 Monaten zuvörderst die allgemeinen Lehren der höhern Maschinenmechanik vortragen konnte. Zu deren Anwendung auf einzele Maschinen, bei welchen hie und da auch schwierigere

Integrirungen nachzuholen waren, konnte mir dann freilich nur so viel Zeit noch übrig bleiben, daſs ich in dem einen Jahre diese, in dem andern Jahre andere Maschinen vornehmen muſste. Zwei Jahre hintereinander diese Vorlesung zu bearbeiten, war denen nothwendig, die als vorzügliche Maschinisten künftig gebraucht werden wollten; ein einziges Jahr konnte allenfalls für künftige Directorial-Beamte und s. w. hinreichend seyn, um doch mit der Sprache des höhern Calculs und dessen Methoden einige Bekanntschaft gemacht zu haben.

Wie hätte ich wohl an hiesiger Bergakademie, deren Eleven mit so vielerlei Wissenschaften theoretisch und praktisch sich befassen, überdies auch die Grubenarbeit praktisch, mehr oder weniger einüben, auch wohl des Verdienstes wegen ernstlich betreiben müssen, irgend eine wahrhafte Benutzung der höhern Mathematik durchsetzen können, wenn ich zuvor in eigenen besonderen Vorlesungen die Algebra, die Analysis endlicher Gröſsen, auch wohl die Combinations-Lehre und s. w. hätte vortragen wollen!

In der That aber ist es, besonders für einen künftigen Praktiker, das rathsamste, daſs er ungefähr auf die angeführte Weise geleitet, und allemal die nöthigsten Lehren der höheren reinen Mathematik, zuvörderst auf sächliche Gegenstände, namentlich auf die wirklich vorhandenen Infinitesimalien der wahren *Mechanik*, unmittelbar und wahrhaft anwenden lerne. (M. s. Kap. XX, den Gebrauch dieses Buches betreffend.)

Non multa, sed multum! wird es hoffentlich von diesem Lehr- und Handbuche heiſsen können. Denn das Wenige, was ich aus dem unermeſslichen Vorrathe des Infinitesimal-Calculs hier vorzutragen rathsam hielt, habe ich dergestalt zu erörtern gesu[illegible] meine Lehrlinge nicht bei der Anwen-

dung ganz unerwartete Schwierigkeiten vorfinden möchten.

Wenn ferner ein Lehrer der Mathematik, der Methodik wegen, meine Darstellungen durchlesen will, um daraus abzunehmen, was in dem bisherigen Lehrvortrage der Verbesserung bedürftig mir geschienen habe: so wird er vermuthlich das Urtheil fällen, daſs er in dieser Hinsicht viele, theils ganz neue, theils doch mit neuer Genauigkeit und Umsicht behandelte Erörterungen vorgefunden habe.

Freyberg, den 1. Junius 1827.

Anmerkung 1.

Bei der Correctur der Kupfertafeln ist es mir nicht unbemerkt geblieben, daſs z. B. in Fig. 7. statt der von mir geschriebenen teutschen Buchstaben 𝔅 und 𝔐, die so genannten englischen gestochen sind; indessen wäre es zu mühsam gewesen, sie umzuändern.

Anmerkung 2.

Die Gründe, weshalb ich es nicht für rathsam gehalten habe, mit einigen Mathematikern (ich denke, lediglich in Ruſsland und Teuschland) ∂x statt dx zu schreiben, werde ich anderwärts, etwa in der Isis vorlegen.

Zwölfte Vorerinnerung *)

Vom Parallelismus der Reihen.

§. 1.

Bei der bekannten Reihe

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + - \ldots\ldots$$

ist es sehr einleuchtend, dafs sie convergent für jede Tangente $x < 1$, und divergent für jedes $x > 1$ seyn mufs. Obgleich wir nun, wenn wir uns das $x = \tan g \varphi$, von der $\tan g\, 0 = 0$ an zuvörderst bis zur $\tan g\, 90^\circ = 1$ anwachsend gedacht, und somit die Reihe $\text{arc tang}\, 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots\ldots$ erhalten haben, eben diese Reihe die letzte der convergenten, und die erste der divergenten Reihen, welche wir bei fernerem Wachsen der Tangente erhalten würden, in der Kürze allerdings nennen mögen; auch genauer sagen könnten, dafs sie die Endgränze der Reihen mit abnehmender Convergenz, und die Anfangsgränze der Reihen mit zunehmender Divergenz abgibt: so ist es doch übrigens sehr gewifs, dafs einerlei Reihe, zugleich convergent

*) Die ersten XI Vorerinnerungen sind vor der Differentialrechnung abgedruckt.

und divergent nicht seyn kann, folglich ein Reihen-Parallelismus vorhanden seyn muſs.

§. 2. Sobald dieses ausgesprochen ist, wird es auch einleuchten, daſs man von der genaueren Betrachtung dieses Parallelismus manche anschauliche Einsicht und Aufklärung für die Reihenlehre zu hoffen hat; daher es verwundernswerth scheinen kann, daſs man, besonders in den neueren Zeiten, da man auf Reihen-Theorie und Functionen-Entwickelung übermäſsige Mühe und Arbeit verwandt hat, nicht auf diese so wichtige Ergänzung der Reihen-Classification gefallen ist. Indessen war es ja durchaus gewöhnlich, bei der Abtheilung in convergente und divergente Reihen, lediglich an die von uns (Vorerinnerung IV) sogenannte summatorische Convergenz und Divergenz zu denken; und nun werden wir in der folgenden XIIIten Vorerinnerung allerdings es einsehen, warum es einen summatorischen Parallelismus freilich nicht geben kann.

§. 3. Nachdem wir aber in jener IVten Vorerinnerung, zwischen Glieder-$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Convergenz}}{\text{Divergenz}}$, und summatorischer $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Convergenz}}{\text{Divergenz}}$ unterschieden haben: so werden wir uns auch deutlich aussprechen können, daſs alle Reihen (bald durchaus, bald in ihren Theilen) entweder Glieder-convergent, oder Glieder-divergent, oder Glieder-parallel, oder doch Glieder-parallel werdend seyn müssen; und werden dann über diese parallelen Reihen die merkwürdige (und lediglich vermittelst des strengen und unmittelbar gebrauchten Infinitesimalcalculs erweisbare) Lehre aufstellen, daſs alle völlig parallele Reihen ganz genau, und die in ihrer Unendlichkeit parallel werdenden, doch Näherungsweise summirbar seyn müssen.

§. 4. Durchaus und völlig parallel verdienen folgende Reihen zu heissen:

1) $\mathfrak{A} = + x + x + x + x + x + x + + \ldots$

2) $\mathfrak{B} = - x - x - x - x - x - x - - \ldots$

3) $\mathfrak{C} = + x - x + x - x + x - x + - \ldots$

4) $\mathfrak{D} = - x + x - x + x - x + x - + \ldots$

x jede veränderliche Grösse bedeutend, also auch $= \frac{1}{u}$, in den Reihen

$$\mathfrak{E} = + \frac{1}{u} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u} - \frac{1}{u} + - \ldots$$

$$\mathfrak{F} = - \frac{1}{u} + \frac{1}{u} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u} - + \ldots$$

Auch $\mathfrak{G} = + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + - \ldots$,

und $\mathfrak{H} = - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - + \ldots$

sind als einzele Fälle der Reihe 3) und 4) zu betrachten, wenn a und b irgend eine unveränderliche Grösse ist, also $x = \frac{a}{b}$ einen einzelen Werthfall des veränderlichen x ausmacht.

§. 5. Warum alle diese Reihen parallel, und zwar, wie wir allemal darunter verstehen wollen, gliederparallel zu heissen verdienen, wird durch ihre graphische Darstellung am besten einleuchten.

Wenn man nämlich für die Reihe 1) in Fig. 29, längs der geraden Grundlinie AB die $+x$ als orthogonale Ordinaten gezeichnet, und durch die Endpuncte derselben die DE gezogen denkt: so wird diese Begränzung ihrer Endpuncte, mit der Grundlinie AB, ihrer Anfangsgränze, durchaus parallel

seyn. Und eben so wird für die Reihe 2) mit der Grundlinie AB, die 𝔇𝔈, als die Endgränze aller verneinten −x, ebenfalls durchaus parallel seyn. Fig. 30.

Indem ferner für die Reihe 3) in Fig. 31, längs der Grundlinie AB, sowohl die bejahten +x, als die verneinten −x, gehörig wechselnd gezeichnet, auch für die Rehe 4) in Fig. 32 die verneinten −x, und bejahten +x, gehörig wechselnd gezeichnet sind: so wird in beiden Fällen die DE der AB, und die 𝔇𝔈 der AB, folglich auch die DE der 𝔇𝔈 parallel seyn.

§. 6. Bei Betrachtung der ersten beiden Reihen 1) und 2) kann sich die Bemerkung aufdringen, dafs sie nur bloſse *Aggregate*, *nicht* aber *Reihen* auszumachen scheinen; weil ja keine besondere Ordnung und Folge ihrer Glieder bestimmt sey, wie es der Begriff einer Reihe allemal erfordert; in welcher ein Glied nach dem andern, vermittelst eines gemeinschaftlichen Gesetzes, zu folgern ist. Da dieses Gesetz bei diesen beiden Reihen lediglich darin bestehen würde, dafs jedes folgende Glied dem vorangehenden völlig gleich sey: so kann es eben dadurch scheinen, als ob zwischen dem Vorangehen und dem Nachfolgen dieser Glieder alle Unterscheidung weggefallen sey; also auch über die Summen dieser beiden Reihen etwas anderes nicht zu sagen sey, als dafs die ganze Summe der 𝔄, als ein Aggregat unendlich vieler $+x$, offenbar $= \infty . x$, und eben so die ganze Summe der 𝔅, offenbar $= \infty . (-x) = -\infty x$ seyn müsse, ohne dafs man dabei auch die Ordnung und Folge dieser Glieder in irgend eine Mitwirkung zu bringen vermögend sey!

§. 7. Hierauf wird sich zweierlei erwiedern lassen.

1) Wenn wir uns für die Reihen 𝔄 und 𝔅, die Summen aus ihren zwei, drei, vier und mehren Gliedern graphisch construiren wollen (man findet diese Construction im XVten Kapitel, für die dortige harmonische Reihe, umständlich erörtert): so kann das nachfolgende Glied erst gezeichnet werden, wenn das vorangehende schon gezeichnet ist. Da nun dieses Aufeinanderfolgen durch eine endliche Entfernung der Ordinaten x dargestellt werden muſs: so ist es das einfachste die lineäre Einheit E dafür zu gebrauchen. Indem man dann längs dieser E in der Grundlinie die Ordinate x als Höhendimension wirksam gedacht hat; so wird durch das Rechteck n.E.x dargestellt, was die n Glieder x, als Reihensumme in der graphischen Darstellung bewirkt haben, und daraus auf $\frac{nEx}{E} = n.x$, als die arithmetische Summe der n Glieder, geschlossen.

Diese graphische Darstellung würde uns freilich für die Summirung der Reihen 𝔄 und 𝔅 selbst, sehr entbehrlich seyn, wird uns aber

2) bei solchen Reihen nützlich, welche, bei lauter zeichengleichen Gliedern, erst in ihrer unendlichen Fortsetzung parallel werdend sind. Und wenn wir dann z. B. für die Reihe $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{n}; \frac{1}{n+1}$ von ihrem nten und (n+1)ten Gliede auch behaupten, daſs sie bei einem gehörig groſsen n, nur unmerklich an Gröſse verschieden seyen: so werden sie uns doch immerhin als zwei solche gleiche Gröſsen vorstellig bleiben, die statt zweier auf einander folgenden, an Gröſse noch etwas verschiedenen Glieder, gebraucht werden sollen.

Dreizehnte Vorerinnerung.

Unmittelbare Summirung der parallelen Reihen.

§. 1.

Die beiden sehr bekannten Lehren, daſs

1) die Reihe, $+x-x+x-x+x-x+\ldots\ldots$ ohn Ende fortlaufend gefordert, ganz genau $=\frac{x}{2}$, als ganze Summe, und dagegen

2) die Reihe, $-x+x-x+x-x+x-\ldots\ldots$ ebenfalls ohn Ende fortlauflaufend, ganz genau $=-\frac{x}{2}$, als ganze Summe geben müsse; und namentlich bei beiden einzelen Fällen,

daſs $+1-1+1-1+1-1+\ldots$ ganz genau $=+\frac{1}{2}$

und $-1+1-1+1-1+1-\ldots$ ganz genau $=-\frac{1}{2}$

seyn muſs, sind seit langen Zeiten schon behauptet, und, wie man meint, auch erwiesen worden. Noch gegenwärtig werden von der Wahrheit dieser Lehren alle Calculatoren, aber aus sehr verschiedenen Gründen sich überzeugt halten; wie es sehr gewöhnlich zu geschehen pflegt, wenn von wirklich wahren Lehren noch kein bündiger Beweis vorhanden ist; da denn die verschiedenen Parteien auch verschiedene Scheinbeweise für die besten zu halten geneigt sind.

§. 2. Diejenigen, welche alle dergleichen Fragen am sichersten durch Functionen-Entwickelung

beantwortet meynen, werden anführen

1) dafs $\frac{x}{1+1} = +x-x+x-x+x-x\ldots\ldots$

2) und $\frac{x}{-1-1} = -x+x-x+x-x+x\ldots\ldots$ ohn Ende fort gibt, und geben mufs, wenn man die Entwickelung dieser gebrochenen Functionen durch die bekannte divisorische Operation ohn Ende fortgesetzt fordert.

Die Function, durch deren Entwickelung die Reihe sich ergibt, heifst *functio generatrix*, die Mutter-Function, nach Eytelwein, der Urbruch.

§. 3. Wer nun behauptet, dafs man statt der unendlich langen Tochter (denn nur von unendlichen Reihen braucht hier die Rede zu seyn) allemal die endliche Gröfse ihrer Mutter zu ergreifen berechtigt sey *), der wird sich von den beiden Sätzen in §. 1, durch die Entwickelung in §. 2, sogleich überzeugt halten,

da ja $\frac{x}{1+1} = \frac{x}{2}$, und $\frac{x}{-1-1} = -\frac{x}{2}$ ist.

§. 4. Euler, in seiner für die Geschichte des Calculs, und besonders für manche gegenwärtige Betreibung desselben, äufserst merkwürdigen Abhandlung, *De seriebus divergentibus* (*Novi Commentarii Acad. Petropol. T. V. ad annos* 1754 *et* 1755) hat in §. 6. die Gegner dieser Behauptung aufgeführt,

---

*) Vorausgesetzt, dafs man die eigenthümliche *functio generatrix* als solche allemal anfzufinden und zu constatiren wisse; welches doch oftmals eine nicht nur sehr mühsame, sondern auch wohl vergebene Arbeit seyn würde.

welche zu bedenken geben, dafs ja für jedes a sich

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \ldots$$ ergeben, für $a = 3$ also

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 \ldots$$ sich ergeben müsse;

welches mit Recht für eine ganz absurde Behauptung von ihnen scheine erklärt zu werden. Indessen pflege man darauf zu erwiedern, dafs es nun einmal einige verneinte Grofsen gebe, welche kleiner als nichts, und andere, welche sogar gröfser als $+\infty$ seyen; und obgleich durch solche Verschiedenheit in den Werthen einiger $-1 < 0$, und anderer $-1 > +\infty$, eine arge Ungewifsheit für den algebraischen Calcul zu befürchten scheine: so sey es doch nun einmal so, dafs uns ein zweifacher Uebergang von den positiven zu den verneinten Gröfsen, der eine durch $= 0$, der andere durch $= \infty$, sowohl durch die Geometrie, als auch durch die Algebra vor Augen gelegt werde!

§. 4. Aber alle hieher gehörigen geometrischen Vorstellungen setzen Drehung voraus; und wenn man durch meine Zerlegung dieses Begriffes, und dessen deutliche Verbindung mit den hiebei eintretenden, ebenfalls graphisch richtig vorgetragenen Lehren der Algebra, alle hieher gehörigen trigonometrischen Paradoxa, dem gesunden Menschenverstande beifällig (in den Neuen Erörterungen über Plus und Minus) erklärt gefunden hat: so wird auch alle Besorgnifs verschwunden seyn, dafs wir, der Geometrie zu gefallen, solche Absurditäten in der Functionen-Entwickelung möchten zugeben müssen.

Als algebraische Instanz wird von Euler aufgeführt, daſs in den Brüchen

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{1};\ \frac{1}{0};\ \frac{1}{-1};\ \frac{1}{-2};\ \frac{1}{-3};\ \frac{1}{-4}\ \ldots\ldots$$

da ihre Nenner immerfort kleiner und kleiner angenommen sind, die Werthe der Quotienten immerfort gröſser und gröſser sich ergeben müssen; also $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$ seyn müsse!

Ich erwiedere, daſs hier sogleich mit der Versicherung, die angesetzten Nenner immerfort kleiner und kleiner werdend zu haben, auch versichert wird, daſs hier von algebraischer Groſsheit und Kleinheit die Rede seyn soll; folglich der Satz, daſs die Quotienten immer kleinere und kleinere Werthe ausmachen müſsten, nur von dem vordern Theile der Reihe, bis zum $\frac{1}{0}$ hin, gültig seyn kann, für den nachfolgenden Theil der Reihe aber, der ebenfalls algebraische Lehrsatz eintritt, daſs bei ungleich bezeichnetem Divisor und Dividend, mit algebraisch kleineren Divisoren, die Quotienten algebraisch gröſser sich ergebend seyn müssen. Daher es von diesem Wechsel des Lehrsatzes eine nothwendige und deutliche Folge ist, daſs $\frac{1}{+0}$ den gröſsten unter allen algebraischen Quotienten, $= +\infty$, und dagegen $\frac{1}{-0}$ sogleich den kleinsten unter allen algebraischen Quotienten, $= -\infty$ ausmachen muſs; indem ja die bejahten Quotienten von $\frac{1}{+4}$ an bis zum $\frac{1}{+0}$ hin an bejahter Gröſse, die negativen

Quotienten dagegen von $\frac{1}{-4}$ an bis zum $\frac{1}{-1}$ hin an verneinter Grösse zunehmend seyn müssen; eben deshalb also im $\frac{1}{0}$, das algebraisch Grösste $+\infty$, und das algebraisch Kleinste $-\infty$, einander begegnend seyn müssen.

§. 5. Seite 211 und 212 der Eulerischen Abhandlung heisst es ferner, wie folget.

„Wenn ich während eines Calculs auf die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots$ gekommen bin, „und statt ihrer $\frac{1}{2}$ ansetze: so wird mich keiner „eines Irrthums zeihen können, dergleichen dagegen „einem jeden sogleich in die Augen leuchten würde, „wenn ich irgend eine andere Zahl statt der $\frac{1}{2}$ an„gesetzt hätte; dagegen es ausser allem Zweifel ge„stellt ist, dass die

„Reihe $1-1+1-1+1-1 \ldots$ und der Bruch $\frac{1}{2}$ „zwei *aequivalente* Grössen sind, von denen die eine „statt der andern allemal mit völliger Sicherheit an„gesetzt werden kann."

„Die ganze Frage scheint also darauf hinaus zu „kommen, ob wir berechtigt seyen, den Bruch $\frac{1}{2}$ „die Summe der Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ zu „nennen! Wer dieses hartnäckig leugnet, und doch „die (eben erwähnte) *Aequivalenz* zu läugnen nicht „wagen will, muss den Verdacht auf sich ziehen, „dass er durch einen blossen Wortstreit sich zu ret„ten suchen wolle." (Durch den folgenden §. 6.

dürfte dieser Verdacht vielmehr auf **Euler** selbst zurück fallen müssen!)

§. 6. „Indessen hoffe ich, daſs der ganze Streit „durch folgende Erörterungen beigelegt seyn wird.“

„Wenn wir in der Analysis auf einen gebroche-„nen oder transcendenten Ausdruck gekommen sind; „so suchen wir denselben in eine schickliche Reihe „umzuändern, auf welche der fernerhin folgende „Calcul mit mehr Bequemlichkeit angewandt werden „könne; daſs also unendliche Reihen in der Analysis „nur in so ferne Statt finden, als sie durch Entwi-„ckelung eines unendlichen Ausdruckes entstanden „sind *); und wir eben deshalb in dem Calcul, Statt „einer jeden unendlichen Reihe, allemal diejenige „Formel ansetzen können, aus deren Entwickelung „jene Reihe entstanden ist. Wie es nun einerseits „äuſserst nützlich ist, die Regeln zu kennen, durch „welche eine zwar endliche, aber unbequem zu be-„handelnde Formel, in eine unendliche Reihe kann „umgeändert werden, so würden andererseits auch „solche Regeln für äuſserst nützlich müssen aner-„kannt werden, durch deren Befolgung wir bei je-„der uns vorgelegten unendlichen Reihe, demjenigen „endlichen Ausdrucke auf die Spur kommen könn-„ten, aus welchem jene Reihe sich ergeben müſste. „Und da wir dann diesen endlichen Ausdruck alle-„mal, ohne irgend fehlerhaft dadurch zu werden, „statt jener unendlichen Reihe ansetzen können: so „müssen ja nothwendig beide von gleichem Werthe „seyn; woraus nun folgt, daſs es keine unendliche

*) Es ist ja aber oft bei analytischen Untersuchungen auch der Fall, daſs man durch Verbindung mehrer Reihen, auf unendliche Reihen kommt, deren endliche Mutterfunction ganz unbekannt geblieben ist.

„Reihe geben kann, wofür sich nicht ein ihr gleich-„geltender endlicher Ausdruck gedenken lasse."

§. 7. „Wenn wir also den gewöhnlichen „Begriff einer Summe in so fern abändern, „dafs wir festsetzen, die Summe einer jeden un-„endlichen Reihe soll derjenige endliche Aus-„druck heifsen, durch dessen Entwickelung jene „Reihe erzeugt würde: so werden alle Beschwerden, „welche von beiderlei Parteien aufgestellt sind, von „selbst wegfallen. Denn erstens ist es ja einleuch-„tend, dafs derjenige endliche Ausdruck, durch des-„sen Entwickelung eine convergente Reihe ent-„standen ist, auch deren Summe in dem gewöhn-„lichen Sinne dieses Wortes ausmacht. Wenn aber „zweitens die Reihe divergent ist, so wird die „Frage darüber nicht fernerhin für absurd zu achten „seyn, wenn wir dabei nach demjenigen endlichen „Ausdrucke forschen, welcher nach analytischen Re-„geln behandelt, eben diese Reihe hervorbringt. Und „weil wir eben diesen endlichen Ausdruck statt je-„ner Reihe in dem Calcul ansetzen können: so kann „über die Gleichheit dieser beiden Gröfsen kein Zwei-„fel Statt finden. Diesen Schlüssen zufolge, werden „wir also selbst auch von dem gewöhnlichen Sprach-„gebrauche nicht abweichend werden, wenn wir „denjenigen Ausdruck, welcher einer vorgegebnen „Reihe gleich ist, auch deren Summe nennen; nur „dafs wir bei divergenter Reihe, mit der Idee einer „Summe nicht auch den Begriff verbinden müssen, „dafs man dem Werthe der Summe desto näher kom-„men müsse, je mehre Glieder derselben man zusam-„men addirt hat."

§. 8. Vermöge dieser Theorie würde doch ein-leuchtend für die obige Frage nach der Summe, als

dem Werthe, als dem Ertrage der

unendlichen Reihe $+x-x+x-x+x-x+\ldots\ldots$

schechterdings nichts können entschieden werden. Denn gesetzt auch, ich wisse es, dass diese Reihe gerade die Tochter der Mutterfunction $\frac{x}{1+1}$ seyn solle, also nicht etwa

mit der Reihe $-x+x-x+x-x+x-\ldots\ldots\ldots$

zu verwechseln sey, welche die Tochter der Mutterfunction $\frac{x}{-1-1}$ seyn würde; auch nicht etwa

mit der Reihe $+x-x+o+x-x+o+x-x+o+\ldots\ldots$

zu verwechseln sey, welche die Tochter der Mutterfunction $\frac{x+x}{1+1+1}=\frac{2x}{3}$ ist: so würde ich doch, nach Euler, nur zu behaupten haben, dass ich die Mutter $\frac{x}{1+1}$ statt der Tochter $+x-x+x-x+\ldots\ldots$ zu setzen, keineswegs aber auch zu behaupten berechtigt sey, dass diese Mutter $\frac{x}{1+1}=\frac{x}{2}$, auch der wahren Summe, dem Werthe, dem Ertrage der unendlichen Reihe gleich seyn müsse, indem ja diese unendliche Reihe nach Eulers Definition und Klassificirung nicht für eine convergente, sondern für eine divergente Reihe zu achten seyn würde *); bei welcher man zwar ebenfalls behaupten dürfe, dass die Mutter die Summe der Tochter genannt werden könne, aber nicht in dem

---

*) Erst durch unmittelbar benutzte Begriffe des Unendlichkleinen und Unendlichgrossen werden wir nachher es beweisen können, dass die Reihe, einer bestimmten Summe sich nähert, also convergent zu heissen verdient.

Verstande, daſs die Mutter und die Tochter von gleicher Gröſse seyn müſsten *).

§. 9. Eine völlig sichere Ueberzeugung von der Richtigkeit

der Gleichung $\frac{x}{1+1} = + x - x + x - x + - \ldots\ldots$,

wird hier, auch von allen übrigen neueren Analysten mir erwiedert werden, erhält man ja dadurch, daſs man die jedesmalige Ergänzung der Reihe in Betracht zieht.

Denn da dieser Reihe, falls sie 1) mit irgend einem ungeraden Gliede abgebrochen wird, die Ergänzung $-\frac{x}{1+1}$ zukommen muſs, also dann der

ganze Quotient $= 0 + 0 + 0 \ldots + 1 - \frac{x}{1+1}$,

oder Falls sie 2) mit einem geraden Gliede abgebro-

---

*) Selbst auch Eytelwein, der in seinen Grundlehren der höhern Analysis, Berlin 1824, eine Theorie der Reihen aufgestellt hat, welche alle bisherigen an Richtigkeit und nettem Calcul zu übertreffen mir scheint, ist doch hierin ebenfalls Eulern treu geblieben. Auch nach dortigem §. 355, soll der Urbruch die ganze Summe der unendlichen, aus ihm erfolgbaren Reihe heiſsen. Da aber bei divergenten (unendlichen) Reihen der Werth (die wahrhafte Summe) der Reihe sich immer mehr und mehr von der (so genannten) 'Summe (der Gröſse des Urbruchs) entfernt: so soll dann die (unendliche!) Reihe abgebrochen! und ihre Ergänzung hinzu gefügt werden; (die ja aber wiederum einen Urbruch für den noch rückständigen unendlichen Theil der Reihe ausmacht, also nur durch eine *petitionem principii* für die wahrhafte Summe dieses unendlichen Reihentheiles anerkannt wird!)

chen wird, ihr die Ergänzung $+\frac{x}{1+1}$ zukommen mufs, also in diesem Falle der ganze

Quotient $= 0+0+0 \ldots + 0 + \frac{x}{1+1}$ ist: so ist hiemit erwiesen, dafs in jedem Falle der ganze Quotient ganz genau $= \frac{x}{1+1} = \frac{x}{2}$ gefunden wird! folglich (füge ich hinzu) mit Hülfe der sogenannten Reihen-Ergänzung in jedem Falle die Richtigkeit der angewandten divisorischen Operation bestätigt wird!

Die hier angewandte Operation, nach welcher man mit $1+1$ als Divisor, die $+x$ als Dividenden zu bearbeiten, eine kürzere oder längere Zeit fortgefahren hat, ist allerdings *à posteriori* in jedem Falle erwiesen, in welchem sich ergibt, dafs die bereits wirklich gefundenen Glieder des Quotienten zusammen addirt, und von dem jedesmal gebliebenen Reste noch dessen $(1+1)$ten Theil hinzugefügt, den richtigen Quotienten als $= \frac{x}{2}$ vollständig angibt. Daran aber hat niemand gezweifelt; sondern es ist die Frage, welche Gröfse

der unendlichen Reihe $x - x + x - x + x - x \ldots\ldots$ gleich seyn müsse, wenn diese unendlich grofs, also niemals abgebrochen gefordert wird!

§. 10. Auch ist es einleuchtend, wie in der obigen Schlufsfolge, durch die Behauptungen, dafs die

unendliche Reihe $+x - x + x - x \ldots = \frac{x}{2}$ sey, ein Zirkel im Beweise begangen wird, weil ja, in

dem einen Falle, wenn man diese unendliche

Reihe $= x - x + x - x \ldots + x - \frac{x}{1+1} = \frac{x}{2}$ behauptet, eben damit schon vorausgesetzt wird, *daſs* $-\frac{x}{1+1}$ *die wahre Summe der sämmtlichen noch übrigen unendlichen Reihe ausmachen müsse!* und eben so in dem andern Falle, wenn diese unendliche

Reihe $= x - x + x - x \ldots - x + \frac{x}{1+1} = -\frac{x}{2}$ behauptet wird, eben damit schon vorausgesetzt ist, *daſs* $+\frac{x}{1+1}$ *die wahre Summe der sämmtlichen noch übrigen unendlichen Reihe ausmachen müsse!*

§. 11. Leibnitz behauptete, daſs die unendliche Reihe $+1 - +1 - 1 \ldots\ldots$ ganz genau $= \frac{1+0}{2}$ also $= \frac{1}{2}$ zur Summe haben müsse, weil während ihres fortdauernden Anwachsens, ihre Summen zwischen $= +1$, und $= 0$, immerfort hin und her schwankend sind. Da bei der unendlichen Reihe $-1 + 1 - 1 + 1 \ldots\ldots$ die Summen immerfort zwischen $= -1$ und $= 0$, hin und her wechselnd sind: so wird man eben so für diese unendliche Reihe zu behaupten haben, daſs deren Summe, der hier vorhandenen Mittelgröſse $\frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ gleich seyn müsse. Sicherlich ist es der Fall, daſs Leibnitz diesen richtigen Blick, als eine glückliche Ahnung, seinem vielen Schlieſsen vermittelst des Unendlichgroſsen und Unendlichkleinen zu verdanken hat, daſs nämlich dieses Hin- und Herschwanken zwischen zwei endlichen Werthen, ins Unendliche (oder ei-

gentlich bis zum Ueberendlichen) fortgesetzt, auf die bestimmte Mittelsumme bringen müsse; wie wir nachher gerade aus diesen Begriffen des Unendlichgrofsen und Unendlichkleinen es bündig erweisen werden.

§. 12. Gegen Leibnitz wandte Callet ein, dafs es ja sehr viele unendliche Reihen

$+1-1+1-1+1-1 \dots$ gebe, von denen sich erweisen lasse, dafs ihre Summe nicht

$= \frac{1}{2}$ ist.

In der That kann man z. B. durch divisorische Operation finden, dafs

auch $\frac{1+1}{1+1+1}$ sich $= 1-1+1-1+1-1 \dots$

also als eine Reihe sich ergibt, deren Summe bei fortdaurendem Anwachse ebenfalls zwischen $= +1$ und $= 0$ hin und her wechselnd ist, und gleichwol, da sie hier aus dem Bruche $\frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$ entstanden ist, mit der vorigen, aus dem Bruche $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ entstandenen, nicht einerlei Werth haben kann. Es ist einleuchtend, dafs Leibnitzens Begründung der obigen Summen hiemit als mangelhaft erwiesen ist.

§. 13. Gegen Callet hat Lagrange erwiedert, dafs allerdings durch divisorische Operation

z. B. $\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8 \dots$

könne gefunden werden, richtiger aber so zu ver-

fahren sey, dafs man

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1+0.x-x^2+x^3+0.x^4-x^5+x^6+0.x^7-x^8 \ldots.$$

finde; da denn für $x = 1$, sich

$$\frac{1+1}{1+1+1} = 1+0-1+1+0-1+1+0-1 \ldots.$$

ergebe, folglich die Summe der gefundenen Glieder zwischen 1, und $1+0=1$, und $1+0-1=0$, immerfort wechselnd sey, und daher die Summe der unendlichen Reihe $= \frac{1+1+0}{1+1+1} = \frac{2}{3}$ richtig gefunden werde.

§. 14. Hiemit ist nun Leibnitzens Regel, dafs die mittlere Gröfse der Werthe, zwischen welchen die Summen der nach und nach angewachsenen Reihe überhaupt wechseln, auch die Summe der ganzen unendlichen Reihe seyn müsse, von Lagrange allerdings nützlich erweitert, und durch die Erweiterung selbst auch einer unrichtigen Anwendung jener zu einseitig aufgefafsten Regel vorgebeugt worden. Nur habe ich gegen Lagrange dreierlei zu bemerken.

Erstens ist es nicht der Fall, dafs diese Regel gerade vermittelst seiner Entwickelungsreihe $1+x+x^2+\ldots.$ dargestellt werden müfste, sondern von derselben ganz unabhängig würde sie meines Erachtens lauten: *Wenn mit einem* n *gliedrigen Divisor dergestalt verfahren wird, dafs die nach und nach dadurch aufgefundenen Glieder des Quotienten, aus* n *gliedrigen Perioden bestehen, und es dann der Fall ist, dafs die Summe jeder Periode* $= 0$ *ausmacht: so wird die Summe der unendlichen Reihe derjenigen mittlern Gröfse gleich seyn, welche man erhält, wenn man zum ersten Gliede der Periode,*

die Summe aus ihren zwei ersten, ferner die Summe aus ihren drei ersten, und s. w., endlich auch die Summe aus den sämmtlichen n *Gliedern der Periode (also* $=$ o) *addirt, und diese Summe der sämmtlichen* n *Wechselwerthe, durch* n *dividirt, dabei aber auch es ausbedungen hat, daſs keinem Gliede in der Gliederperiode ein unendlich groſser Werth beigelegt sey.*

Zweitens ist diese Regel nicht nur von Lagrange selbst durchaus nicht erwiesen, sondern kann auch von irgend einem Mathematiker seiner Schule *) schlechterdings nicht erwiesen werden, indem sich aus meinem nachfolgenden Beweise ergeben wird, daſs die Verhältnisse des Unendlichen dazu wesentlich nöthig sind. Soll etwa, und so wird es Lagrange hier vorausgesetzt haben, der Beweis vermittelst der Ergänzung geführt werden, so wird ja damit ein offenbarer Cirkel im Beweise begangen (§. 10).

Dritens. Obgleich ich selbst hier die Regel, der Ansicht ihres Erfinders gemäſs, durch Voraussetzung des Mutterbruches ausgedrückt habe: so werde ich doch eigentlich behaupten können, daſs diese Regel von allen Mutterbrüchen unabhängig durch sich selbst besteht.

---

*) Falls er seinem Lehrer wirklich getreu bleiben, und aus den Begriffen des Unendlichen unmittelbar zu schlieſsen vermeiden will; welches aber genau betrachtet von keinem wirklich geschieht; obgleich einige, wenn man mit ihnen gewisse Schwierigkeiten der Infinitesimalrechnung zu besprechen wünscht, allerdings zu erwiedern pflegen, daſs sie darauf sich einzulassen nicht nöthig fänden, weil ja Lagrange, durch seinen Functionen-Calcul, ohne Infinitesimalien fertig zu werden wisse!

§. 15. Denn wenn man auch von den Gesetzen der Reihen

$A = x - x + x - x + x - x \ldots.$

$B = -x + x - x + x - x + x \ldots.$

$C = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 \ldots.$

$D = a + b + c + a + b + c + a + b + c \ldots.$

$E = a + b + c + 0 + a + b + c + 0 + a + b + c + 0 \ldots$

irgend etwas mehres nicht weiſs, als was aus dem Anblicke ihrer Glieder-Perioden vor Augen liegt: so läſst sich eben daraus, unter der Voraussetzung, daſs die Summe jeder Gliederperiode $= 0$ sey, es bündig erweisen, daſs jede dieser Reihen bis zu einer unendlich groſsen, oder wie wir lieber sagen wollen, überendlich groſsen Gliederanzahl fortgesetzt gefordert, die ganze Summe

der A ganz genau $= \frac{x}{2}$

" B " " $= -\frac{x}{2}$

" C " " $= \frac{2}{3}$

" D " " $= \frac{a + (a+b) + (a+b+c)}{3} = \frac{a + (a+b)}{3}$

" E " " $= \frac{a+(a+b)+(a+b+c)+(0+0)}{4} = \frac{a + (a+b)}{4}$

seyn muſs.

§. 16. Da ich in den beiden letzten Gleichungen behaupte, daſs die Glieder a, b, c, wenn sie nur so beschaffen sind, daſs sie algebraisch addirt werden können, und dann ihre Summe $= 0$ geben, übrigens seyn mögen, was sie wollen; und da ich überhaupt auch m gliedrige

Perioden $a + b + c + d + e \ldots + l + m$, mit eben

so allgemeiner Gliedergröſse zugelassen verlange: so wird hiemit alle Hoffnung abgewiesen seyn, die Summe einer solchen unendlichen Reihe durch Erforschung ihrer Mutterfunction bestimmen zu wollen; zu geschweigen, daſs die dabei eingeschlagene Bestimmungsmethode durch die Ergänzung, eine *petitionem principii* in sich hat!

§. 14. Sehr gerathen muſs es jedem Unbefangenen scheinen, daſs man, um die Summe solcher unendlichen Reihen zu bestimmen, nicht die Lehren und Begriffe des Unendlichgroſsen und Unendlichkleinen verabscheuen, sondern sorgfältig im Auge behalten müsse! Wenn nun aber hier die Erfahrung eintritt, daſs auch die Infinitesimalisten ebenfalls einen bündigen Beweis, selbst auch für die allgemein geglaubten Summen der beiden Reihen A und B, nämlich $A = \frac{x}{2}$ und $B = -\frac{x}{2}$, nocht nicht gegeben haben: so ist auch diese Erscheinung, wie so manches andere Ergebniſs in dem Infinitesimal-Calcul, meines Erachtens gerade daraus zu erklären, daſs man in den Begriffen und Lehren seines Infinitesimal-systemes immer noch zu ängstlich an den endlichen Gröſsen kleben blieb.

§. 17. Wenn man unter dem Unendlichgroſs, ∞, nur zu verstehen wagt, was wir nach Vorerinnerung VII. §. 3 und 6 *), durch ∞ wollen angedeutet wissen: so wird

1) bei dem Beweise durch die Ergänzung, nicht ganz so leicht, als beim Gebrauche der Mutter-

---

*) Wo in Zeile 2, statt: nie, wie ∞ ein ohn Ende zu lesen ist: nicht, wie ∞, ein immerfort noch gröſser.

function es einzusehen seyn, daſs dieser Beweis schon voraussetzt, was noch erwiesen werden soll.

2) Ein Infinitesimalsystem, welches ein ∞, ein Vollgroſs, oder wie wir es im Allgemeinen noch besser nennen möchten, ein Ueberendliches zu fordern nicht wagt, kann den gemeinen, oder sogar den algebraischen Zahlensystemen, genaū entsprechend nicht werden, weil alle diese Systeme eine o haben, und haben müssen. Sogleich für die Untersuchung der Reihensumme

A) $= + x - x + x - x \ldots\ldots$, müssen wir ja es zu behutzen wünschen, daſs die Glieder-Periode $+ x - x$ ganz genau $= 0$ ist, also ein $= \frac{1}{\infty}$, nicht aber ein unendlich kleiner noch werdendes $= \frac{1}{\infty}$ seyn soll!

3) Sobald wir unser überendliches ∞ für eine Untersuchung angesetzt haben, so werden wir es unerlaubt finden, auch ein $\infty + 1$ dafür gebrauchen zu wollen; da hingegen wir kein Bedenken haben würden, neben einem von uns angesetzten ∞ auch ein $\infty + 1$; $\infty + 2$ u. s. w. gebrauchen zu wollen. Und eben dadurch werden wir bei der vorliegenden, und mancher andern Untersuchung, ungemein leicht auf Schlüsse gerathen können, die bisweilen unrichtig, oder doch nichts entscheidend seyn werden.

§. 18. Vor allem andern wird und muſs man mir zugestehen, daſs eine Reihe unendlich heiſst, wenn sie eine unendliche Anzahl von Gliedern enthält; nicht etwa eine unendliche Anzahl von Gliederperioden! Statt der unendlichen Reihe A, sich eine

unendliche Anzahl von Gliederperioden gedacht, würde man nicht nur ihre Summe immerfort $\infty.(+1-1) = \infty.1-\infty 1$, also nach Vorerinnerung VII. §. 12, ihre Summe $= 0$, sondern auch bei gefordertem überendlichen ∞, ihre Summe $= \infty.1-\infty.1 = 0$ haben. Auch würde diese 0 nicht die Summe einer Reihe, sondern nur die Summe eines Aggregates von unendlich vielen $+1$, und eben so unendlich vielen -1 seyn, ohne daſs auf deren Anordnung und Folge etwas ankäme; wie doch der Begriff einer Reihe es mit sich bringt; daher eben deshalb die Summe der Reihe A, von der Summe der Reihe B sehr verschieden seyn kann.

§. 19. Sey nun $A = x-x+x-x+x-x \ldots$

und $B = -x+x-x+x-x+x \ldots$

bedeutend, und als Gesetz für die unendliche Fortsetzung, wie es durch sich selbst einleuchtet, anerkannt, daſs in jeder von diesen beiden Reihen ihre Glieder nur zwischen $+x$ und $-x$ wechselnd sind, die Reihe A aber mit $+x$, die Reihe B dagegen mit $-x$ ihren Anfang nimmt: so ist es sogleich einleuchtend, daſs ${}^{n}\mathfrak{S}A$ die Summe der ersten n Glieder in der Reihe A, und ${}^{n}\mathfrak{S}B$ die Summe der ersten n Glieder in der Reihe B bedeutend, allemal

$${}^{n}\mathfrak{S}A + {}^{n}\mathfrak{S}B = n.\begin{cases}+x\\-x\end{cases} = n.0 = 0 \text{ seyn muſs,}$$

sowohl wenn n eine ungerade Zahl, als auch wenn n eine gerade Zahl ist; folglich auch eben so allgemein ${}^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty}\mathfrak{S}B = 0$ seyn muſs, wir möchten uns dabei ∞ als eine ungerade, oder als eine gerade Zahl zu denken haben.

§. 20. Wenn wir dann aber, auſser dieser Gleichung für die Summe der beiden überendlichen

Reihen auch noch die beiden Gleichungen für ihre Differenzen

$$^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty}\mathfrak{S}B = +x$$

und $^{\infty}\mathfrak{S}B - {}^{\infty}\mathfrak{S}A = -x$ zu erweisen suchen wollen (und absichtlich will ich zuvörderst diesen lehrreichen Umweg einschlagen): so kann es allerdings den Schein gewinnen, als ob wir zwischen einem geraden und ungeraden ∞ immerfort möchten zu unterscheiden haben!

1) Wenn ∞ eine ungerade, folglich $\infty - 1$ eine gerade Zahl ist:

$$\text{so hat man } {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = \frac{\infty-1}{2}x - \frac{\infty-1}{2}x$$

$$\text{und } {}^{\infty}\mathfrak{S}A = \frac{\infty-1}{2}x - \frac{\infty-1}{2}x + x$$

2) Wenn dagegen ∞ eine gerade, folglich $\infty - 1$ eine ungerade Zahl ist:

$$\text{so hat man } {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = \frac{\infty-2}{2}x - \frac{\infty-2}{2}x + x$$

$$\text{und } {}^{\infty}\mathfrak{S}A = \frac{\infty}{2}.\,x - \frac{\infty}{2}.\,x$$

dafs also aus 1) sich das Verhältnifs

$$^{\infty-1}\mathfrak{S}A : {}^{\infty}\mathfrak{S}A = 1 - \frac{1}{\infty} - 1 + \frac{1}{\infty} : 1 - \frac{1}{\infty} - 1 + \frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty}$$

$$= 1 - 1 \quad : 1 - 1 + \frac{2}{\infty}$$

und aus 2) sich das Verhältnifs

$$^{\infty-1}\mathfrak{S}A : {}^{\infty}\mathfrak{S}A = 1 - \frac{2}{\infty} - 1 + \frac{2}{\infty} + \frac{2}{\infty} : 1 - 1$$

$$= 1 - 1 + \frac{2}{\infty} : 1 - 1$$

ergibt, folglich, da auch $-1 + \frac{2}{\infty} = -1$ ganz

genau seyn muſs (Vorerinnerung VIII. §. 6.) in jedem der beiden Fälle, man mag sich ∞ als eine ungerade, oder als eine gerade Zahl denken wollen, allemal $^{\infty-1}\mathfrak{S}A : {}^{\infty}\mathfrak{S}A = 1-1 : 1-1 = 1 : 1$, also die Summe $^{\infty-1}\mathfrak{S}A$ ganz genau der Summe $^{\infty}\mathfrak{S}A$ gleich geworden seyn muſs.

§. 21. Eben so allgemein, es mag ∞ eine ungerade, oder gerade Zahl seyn sollen, kann es erwiesen werden, daſs ganz genau $^{\infty-1}\mathfrak{S}B = {}^{\infty}\mathfrak{S}B$ geworden seyn muſs.

§. 22. Sey m irgend eine (bejahte, ganze) ungerade Zahl, so klein oder so groſs, als sie wolle, und n irgend eine gerade Zahl: so ist es sehr offenbar, daſs $^{n}\mathfrak{S}A - {}^{(n-1)}\mathfrak{S}B = +x$

und $^{n}\mathfrak{S}A - {}^{(n-1)}\mathfrak{S}B = -(-x)$ also ebenfalls $= +x$, folglich auch, ∞ mag ein gerades oder ungerades Ueberendlichgroſses seyn sollen, allemal $^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = +x$ seyn muſs.

§. 23. Da aber nach §. 21. jedes $B^{\infty-1} = {}^{\infty}B$ geworden seyn muſs:

so muſs auch jedes $^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty}\mathfrak{S}B = +x$ geworden seyn.

§. 24. Wird nun 1) diese Differenz, zu der oben (§. 19) erwiesenen Summe $^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty}\mathfrak{S}B = 0$ addirt.

so erhält man $^{\infty}\mathfrak{S}A = \frac{x}{2}$.

Wird dagegen 2) eben diese Differenz, von dieser Summe subtrahirt:

so erhält man $^{\infty}\mathfrak{S}B = -\frac{x}{2}$.

§. 25. Demnach wären die beiden, allgemein als richtig anerkannten Sätze in §. 1, hiemit auch bündig erwiesen, als eine ganz genaue Folge, aus den beiden von uns erwiesenen Sätzen, daſs ganz

genau die Summe $^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty}\mathfrak{S}B = 0$ seyn,
und die Differenz $^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty}\mathfrak{S}B = x$ geworden
seyn muſs.

§. 26. Die Gegner der Infinitesimalrechnung werden es hieraus abnehmen, daſs jene beide Sätze in §. 1, die sie für ausgemacht wahr anerkennen, und vermittelst der Ergänzung, also vermittelst der schon gerügten *petitio principii* erwiesen glaubten, auf die beiden Gleichungen

$$^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty}\mathfrak{S}B = 0$$
$$\text{und } {}^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty}\mathfrak{S}B = x$$

gegründet sind, welche ihnen, sich selbst zu widersprechen nur so lange scheinen können, als sie sich weigern wollen, für die Summen unendlicher Reihen vermittelst deutlicher Begriffe des Unendlichen schlieſsen zu wollen: aus welchen auf das bündigste sich ergibt, daſs man, wo $^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty-1}\mathfrak{S}B$ durch lauter $^{\infty}\mathfrak{S}A$ soll angegeben werden, dafür irgend etwas anders als $2 \cdot {}^{\infty}\mathfrak{S}A$ nicht behaupten kann, und gerade dieses behaupten muſs.

§. 27. Um dem strengen Sinne dieser beiden Gleichungen vermittelst des Gesetzes der Stetigkeit uns befriedigend zu nähern, ist es allerdings gerathen, daſs wir uns statt der überendlichen Zahl ∞ zuvörderst nur $\propto$, als eine ohn Ende noch fort wachsende Zahl gefordert denken. Indem wir dann durch die Schlüsse in §. 20. würden gefunden ha-

ben, dafs $\propto$ als eine ungerade Zahl gedacht,

1) sich $^{\propto-1}\mathfrak{S}A : {}^{\propto}\mathfrak{S}A = 1 - 1 : 1 - 1 + \frac{2}{\propto}$,

und dagegen $\propto$ als eine gerade Zahl gedacht,

2) sich $^{\propto-1}\mathfrak{S}A : {}^{\propto}\mathfrak{S}A = 1 - 1 + \frac{2}{\propto} : 1 - 1$ ergibt:

so sehen wir ein, dafs in beiden Fällen, das Verhältnifs $^{\propto-1}\mathfrak{S} : {}^{\propto}\mathfrak{S}A$ dem Verhältnisse $1 - 1 : 1 - 1$, also dem Verhältnisse $1 : 1$ ohn Ende sich nähernd ist, mit dem Unterschiede, dafs im ersten Falle das zweite Glied, im zweiten Falle das erste Glied, einen unächten Bruch ausmacht, der während der Näherung immerfort noch etwas gröfser, obgleich immerfort weniger und weniger gröfser als 1 seyn mufs.

Dafs nun dieses veränderlichen, dem Verhältnisse der Gleichheit immerfort sich nähernden Verhältnisses ungeachtet, die Differenz $^{\propto}\mathfrak{S}A - {}^{\propto-1}\mathfrak{S}A$ immerfort unverändert $= x$ bleibt, ist doch eben so wenig unschicklich, als es unschicklich ist, dafs z. B. in den Proportionen

$$^{2}\mathfrak{S}A : {}^{3}\mathfrak{S}A = 1x - 1x : 1x - 1x + x = 1 - 1 : 1 - 1 + 1$$

$$^{4}\mathfrak{S}A : {}^{5}\mathfrak{S}A = 2x - 2x : 2x - 2x + x = 1 - 1 : 1 - 1 + \frac{1}{2}$$

$$^{6}\mathfrak{S}A : {}^{7}\mathfrak{S}A = 3x - 3x : 3x - 3x + x = 1 - 1 : 1 - 1 + \frac{1}{3}$$

die Verhältnisse der beiden Glieder immerfort sich ändern, indefs doch ihre Differenzen $-{}^{2}\mathfrak{S}A + {}^{3}\mathfrak{S}A = -{}^{4}\mathfrak{S}A + {}^{5}\mathfrak{S}A$ u. s. w. immerfort einander gleich, $= x$ bleibend seyn müssen.

§. 28. Wenn wir indessen durchaus nur ein $\propto$, nicht auch ein ∞, als das erreichte Ziel des $\propto$ für den Gebrauch des Calculs zugestehen wollten: so

würden wir auch nie behaupten können, dafs wir die ganze Summe der unendlichen

Reihe $A = + x - x + x - x \ldots$ genau $= \frac{x}{2}$ erwiesen hätten, sondern nur zu beweisen wüfsten, dafs die Summe dieser Reihe, während ihres unendlichen Wachsens, der Gröfse $= \frac{x}{2}$ immerfort näher und näher kommend seyn müsse.

So äufserst sachtreffend dieses in dem vorliegenden Falle allerdings scheinen kann; so müssen wir doch nach Vorerinnerung VII. §. 4. es bedenken, dafs wir ja in andern Fällen ein erreichtes überendliches Vollgrofs für den Calcul, und namentlich auch in der Geometrie, wirklich zugeben und gebrauchen müssen; von den Gliedern einer unendlichen Reihe, ob sie gleich als Zahlen dargestellt werden, doch auch geometrische und andere stetige Gröfsen sollen gemessen werden, von denen es, als stetigen Gröfsen gewifs ist, dafs ihr Unendlichkleines auch völlig ins $= 0$ übergehend seyn mufs, und daher in ihrem $\frac{1}{\propto} = 0 = \frac{1}{\infty}$ geworden, auch das ∞ als ein erreichtes Ueberendliches mufs gedacht werden.

Und wenn nun eben diese Infinitesimalisten sogar glauben behaupten zu müssen, dafs immerfort wachsende bejahte Gröfsen, und namentlich auch wachsende bejahte Zahlen, durch das Unendliche hindurch ins Negative übergehend seyen: so ist ja, sogar dieser widersinnigen Lehre zu gefallen, von ihnen darauf Verzicht gethan, dafs die unendlichen Gröfsen, immer nur wachsend, nicht auch überendlich gewachsen gedacht werden sollen!

§. 29. Was diejenigen Analysten betrifft, welche alle offenbare und unmittelbare Benutzung von den Begriffen des Unendlichen zu vermeiden suchen: so wird, meines Erachtens, Herr **Eytelwein** der schärfste und richtigste unter allen seyn. Sehr richtig aber sagt er ausdrücklich, daſs bei **convergirenden** Reihen, die sich ohn Ende einer bestimmten Summe nähern, der **Urbruch** die **ganze** Summe der Reihe angebe.

Und von der Reihe $A = x - x + x - x + x - x \ldots$ haben ja sie alle ohne Bedenklichkeit es behauptet, daſs ihre Summe **ganz genau** $= \frac{x}{2}$ ist, wobei sie freilich durch den Scheinbeweis vermittelst der Ergänzung sich täuschten, und nun durch lauter endliche Gröſsen die Summe der **unendlichen** Reihe erwiesen meynten!

§. 30. Ein ungerades und ein gerades ∞, habe ich oben neben einander nur deshalb behandelt, um auf diese Weise gleichsam durch die Wirklichkeit es darzulegen, daſs in der Unendlichkeit das Gerade und das Ungerade in gewisser Hinsicht einander gleichgültig werdend, und in der Ueberendlichkeit in der That vollkommen gleichgültig geworden seyn müssen.

Diese Gleichgültigkeit erstreckt sich aber weiter. Nicht bloſs für einfache und zweifache (ungerade und gerade), sondern auch für 3fache, 4fache Zahlen, und s. w. würde sie in gewisser Hinsicht ebenfalls Statt finden. Diese Hinsicht ist eingetreten, wenn es über die Summen ${}^{\infty}\mathfrak{S}A$ und ${}^{\infty-1}\mathfrak{S}A$ und ${}^{\infty-2}\mathfrak{S}A$ und s. w. Fragen zu beantworten gibt, welche schlechterdings vermittelst des so genannten **geometrischen Verhältnisses** dieser Gröſsen zu beurtheilen und zu beantworten sind; z. B. wenn

man die Summe $^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A$, oder die Differenz $^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A$ durch lauter $^{\infty}\mathfrak{S}A$ will ausgedrückt wissen.

§. 31. So lange wir nur nach der Summe oder der Differenz dieser Gröſsen fragen, so haben wir dabei, der Natur dieser Fragen gemäſs, lediglich das so genannte arithmetische Verhältniſs derselben in Betracht zu nehmen. Z. B.

$$\text{wenn } {}^{\infty}\mathfrak{S}A = \frac{\infty-1}{2}x - \frac{\infty-1}{2}x + x,$$

$$\text{also } {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = \frac{\infty-1}{2}x - \frac{\infty-1}{1}x \text{ ist: so}$$

muſs die Differenz $^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = x$ seyn, indem die unendlichen Gröſsen, bei dem Abziehen von einander, sich einander vernullen müssen.

Da es nun hier ferner der Fall ist, daſs auch die sämmtlichen unendlichen Gröſsen, welche das $^{\infty-1}\mathfrak{S}A$ ausmachen, sich selbst einander vernullen müssen, also $^{\infty-1}\mathfrak{S}A = 0$ seyn muſs: so weiſs man hier, daſs auch die Summe $^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = x$ seyn muſs, ohne daſs dabei von dem geometrischen Verhältnisse der beiden Gröſsen $^{\infty}\mathfrak{S}A$ und $^{\infty-1}\mathfrak{S}A$ die Rede zu seyn braucht.

Da das Ergebniſs, daſs hier

nicht nur die Summe $^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = x$

sondern auch die Differenz $^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = x$

gefunden wurde, schlechterdings nur deshalb Statt finden konnte, weil die Gröſse $^{\infty-1}\mathfrak{S}A = 0$ ist: so kann hier durch den bekannten Lehrsatz, daſs die halbe Summe und die halbe Differenz zweier Gröſsen, diese beiden Gröſsen angeben muſs, etwas anders nicht bestimmt werden, als daſs die eine Gröſse $^{\infty}\mathfrak{S}A = x$, und die andere $^{\infty-1}\mathfrak{S}A = 0$ seyn muſs.

§. 32. Wenn wir aber auch das geometrische Verhältniſs dieser beiden Gröſsen zu Hülfe nehmen, also (nach §. 20.) es bedenken, daſs bei erreichter überendlicher Gliederzahl, die Summe $^{\infty-1}\mathfrak{S}A$, der Summe $^{\infty}\mathfrak{S}A$ gleich geworden seyn muſs: so werden wir aus der obigen

Gleichung $^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = o$ zu folgern haben,

daſs auch $^{\infty}\mathfrak{S}A + {}^{\infty}\mathfrak{S}A = x$, also $^{\infty}\mathfrak{S}A = \frac{x}{2}$ geworden seyn muſs.

Aus der zweiten obigen

Gleichung $^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty-1}\mathfrak{S}A = x$, werden wir, auch die Gleichung $^{\infty}\mathfrak{S}A - {}^{\infty}\mathfrak{S}A = x$ zu folgern, deshalb nicht berechtigt seyn, weil bei jener Differenz der beiden Gröſsen $^{\infty}\mathfrak{S}A$ und $^{\infty-1}\mathfrak{S}A$, die sämmtlichen in ihnen beiden steckenden unendlich vielen Glieder einander vernullt, also ihre Wirksamkeit verloren haben, da doch das geometrische Verhältniſs dieser beiden Gröſsen, nach (§. 20.) aus dieser unendlichen Menge von Gliedern zu folgern war.

§. 33. Und für diese ganze Lehre wird es nun wichtig zu bemerken seyn, daſs z. B. bei einer Reihe $\mathfrak{B}$ mit dreigliedrigen Perioden $x+y+z$, um die Gleichheit der Verhältnisse

$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B} : {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B} : {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ zu erweisen, von dieser Reihe lediglich zu wissen nöthig ist, daſs x und y und z lauter endliche Gröſsen seyn sollen.

Denn wenn wir zuvörderst

$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = x+y+z + x+y+z \ldots. + x+y+z + x$

angesetzt, von dieser Reihe also zuvörderst angenommen haben, daſs sie ihre überendliche ∞ gerade mit einem x, dem ersten Gliede der Periode, erreicht.

haben möge: so muſs nun

$${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{\infty-1}{3}x + \frac{\infty-1}{3}y + \frac{\infty-1}{3}z + x$$

$${}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{\infty-1}{3}x + \frac{\infty-1}{3}y + \frac{\infty-1}{3}z$$

und $${}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{\infty-2}{3}x + \frac{\infty-2}{3}y + \frac{\infty-2}{3}z + x + y$$

seyn.

Hieraus folgt für die geometrischen Verhältnisse

$${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B} \quad : \quad {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B} \quad : \quad {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$$

daſs sie =

$$1+\frac{x}{\infty}+1+\frac{y}{\infty}+1+\frac{z}{\infty}+\frac{3x}{\infty} : 1+\frac{x}{\infty}+1+\frac{y}{\infty}+1+\frac{z}{\infty} : 1+\frac{z}{\infty}$$
$$+1+\frac{y}{\infty}+1+\frac{z}{\infty}+\frac{3}{\infty}(x+y)$$

also $= 1+1+1+\frac{3x}{\infty} : 1+1+1 : 1+1+1+\frac{3}{\infty}(x+y)$

$= 1 : 1 : 1$ geworden seyn müssen: also ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ geworden seyn muſs.

§. 34. Die überendliche Gliederzahl ∞ gerade mit dem ersten Gliede der Periode erreicht anzunehmen, scheint das natürlichste zu seyn; indessen würde, auch wenn man das zweite Glied, y, oder das dritte, z, dafür annehmen wollte, ebenfalls die Gleichheit der drei Summen ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$; ${}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ und ${}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$, wie vorhin sich ergeben: denn es wird auch dann nur dazu erfordert, daſs $\frac{\mathfrak{z}}{\infty} = 0$ werdend, und $\frac{\mathfrak{z}}{\infty} = 0$ geworden seyn muſs, wenn $\mathfrak{z}$ irgend eine endliche Zahl ist.

§. 35. Wenn wir aber zu der obigen Eigenschaft der Reihe $\mathfrak{B}$, dafs sie aus dreigliedrigen Perioden, von lauter endlichen Gliedern x, y und z bestehe, noch die besondere Eigenschaft dieser Perioden hinzufügen, dafs jede $= x + y + z = o$ seyn soll: so folgt hieraus

$$\text{dafs } {}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{\infty - 1}{3}(x+y+z) + x = x$$

$$ {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{\infty - 1}{3}(x+y+z) \qquad = o$$

$$\text{und } {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{\infty - 2}{3}(x+y+z) + x + y = x + y$$

also ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B} + {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B} + {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = 2x + y$ seyn mufs.

Und da nun durch diese zweite besondere Eigenschaft der Reihe, der obigen ersten kein Eintrag geschieht, also immer noch die Gleichheit der drei Gröfsen ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$; ${}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ und ${}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ erwiesen bleibt: so können wir nunmehr versichert seyn,

dafs ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{2x+y}{3}$, auch ${}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{2x+y}{3}$,

auch ${}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{2x+y}{3}$ geworden seyn mufs.

Und ganz dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn wir nicht gerade mit dem Gliede x, sondern mit y, oder mit z, die überendliche Gliederzahl der Reihe erreicht annehmen wollten.

Nach diesen umständlichen Erörterungen werde ich nun folgende Lehrsätze aufstellen, und in der Kürze beweisen können.

§. 36. *Erster Lehrsatz.*

Wenn man von der Reihe mit 2gliedrigen Perioden

$\mathfrak{A} = x+y + x+y + x+y + \ldots\ldots$

1tens *weiſs, daſs jedes Glied derselben, also x sowohl als y, eine endliche, oder doch nur unendlich kleine, nicht unendlich groſse Gröſse seyn soll: so muſs* $^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ *seyn. Und wenn*

2tens *auch gegeben ist, daſs die Periode* $x+y = 0$ *seyn soll:*

so muſs $^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{x}{2}$, *auch* $^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{x}{2}$ *seyn.*

§. 37. *Beweis.*

Wir mögen uns entweder Itens

$$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = x+y + x+y + \ldots + x+y + x$$

also $$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{\infty-1}{2}x + \frac{\infty-1}{2}y + x$$

und $$^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{\infty-1}{2}x + \frac{\infty-1}{2}y,$$

oder wir mögen uns IItens

$$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = x+y + x+y + \ldots + x+y$$

also $$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{\infty}{2}x + \frac{\infty}{2}y$$

und $$^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{\infty-1}{2}x + \frac{\infty-1}{2}y + x$$ denken;

in beiden Fällen folgt,

daſs $^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} : {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = 2 : 2$, also $^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ geworden seyn muſs: welches das 1te war.

Wenn wir nun hinzunehmen, daſs 2tens, $x+y=o$ seyn soll: so muſs

$$\text{im Iten Falle, } {}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{\infty-1}{2}.(x+y)+x = x$$

$$\text{und } {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{\infty-1}{2}.(x+y) \qquad = o$$

$$\text{im IIten Falle, } {}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{\infty}{2}.(x+y) \qquad = o$$

$$\text{und } {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{\infty-1}{2}.(x+y)+x = x,$$

in beiden Fällen also

$${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} + {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = x \text{ seyn.}$$

Da nun nach dem ersten allgemeinen, für j e d e s e n d l i c h e x und y gültigen, auch im Isten sowohl als im IIten Falle, gültigen Satze, ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A}$ geworden seyn muſs: so muſs in beiden Fällen,

sowohl ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{x}{2}$, als auch ${}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \frac{x}{2}$ geworden seyn.

§. 37. *Beispiele.*

1) Da die Reihe $A = x - x + x - x + x - x + \ldots$ z w e i gliedrige Perioden hat, und jede derselben $= o$, ihr erstes Glied aber $= + x$ ist: so muſs ${}^{\infty}\mathfrak{S}A =$ die ganze Summe der ganzen ohn Ende fortgesetzten Reihe bedeutend,

${}^{\infty}\mathfrak{S}A = + \frac{x}{2}$ seyn; v o r a u s g e s e t z t, daſs der Bedingung des Lehrsatzes gemäſs, irgend ein unendlich groſser Werth für x nicht verlangt werde.

2) Da die Reihe $B = -x+x-x+x-x+x-\ldots$ zweigliedrige Perioden hat, und jede derselben $= 0$, ihr erstes Glied aber $-x$ ist: so muſs nach dem Lehrsatze, $\infty\mathfrak{S}B = -\frac{x}{2}$ seyn; wiederum ausbedungen, daſs irgend unendlich groſse Werthe des x nicht gebraucht werden.

3) Für die Reihen $R = \pm\frac{M}{N} \mp \frac{M}{N} \pm \frac{M}{N} \mp \frac{M}{N} \pm \ldots$ deren M und N alle beliebige Gröſsen, nur nicht unendlich groſse $\frac{M}{N}$ seyn können, hat man, ebenfalls nach dem Lehrsatze,

$$\infty\mathfrak{S}R = \pm\frac{1}{2}\,\frac{M}{N},$$ mit dem $\begin{smallmatrix}\text{obern}\\ \text{untern}\end{smallmatrix}$ Zeichen, je nachdem der Reihe erstes Glied $\begin{smallmatrix}\text{bejaht}\\ \text{verneint}\end{smallmatrix}$ ist.

§. 38. *Zweiter Lehrsatz.*

Wenn man für die Reihe

$$\mathfrak{B} = x+y+z + x+y+z + x+y+z + \ldots$$

1*tens bedungen hat, daſs irgend einem Gliede ihrer dreigliedrigen Periode,* $x+y+z$, *ein unendlich groſser Werth nicht beigelegt werden soll:*

so muſs $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{B} = {}^{\infty-1}\mathfrak{B} = {}^{\infty-2}\mathfrak{B}$ *seyn.*

Und wenn

2*tens gegeben ist, daſs allemal* $x+y+z = 0$ *seyn soll:*

so muſs $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{B}$ *(auch* ${}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$, *und* ${}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{B}$) $= \frac{2x+y}{3}$ *seyn.*

Der Beweis

ist aus obigen §. 33 bis §. 35 leicht abzunehmen.

§. 39. *Beispiele.*

1) Sey $\mathfrak{B} = x+0-x + x+0-x + x+0-x + \ldots\ldots$ gegeben: so muſs, nach dem Lehrsatze,

$$\infty\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{2x-0}{3} = \frac{2x}{3} \text{ seyn.}$$

2) Sey $\mathfrak{B} = x-x+0 + x-x+0 + x-x+0 + \ldots\ldots$

gegeben: so muſs $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{2x-x}{3} = \frac{x}{3}$ seyn.

3) Sey $\mathfrak{B} = -x+x+0 + -x+x+0 + -x+x+0 + \ldots\ldots$ gegeben: so muſs $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{-2x+x}{3} = -\frac{x}{3}$ seyn; allemal ausbedungen, daſs irgend ein unendlich groſser Werth dem x nicht beigelegt werde.

4) Sey $\mathfrak{B} = a+b-(a+b) + a+b-(a+b) + \ldots\ldots$

gegeben: so muſs $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{2a+b}{3}$ seyn.

5) Sey $\mathfrak{B} = a-(a+b)+b + a-(a+b)+b + \ldots$ gegeben: so muſs $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{2a-(a+b)}{3} = \frac{a-b}{3}$ seyn.

6) Sey $\mathfrak{B} = -(a+b)+a+b + -(a+b)+a+b + \ldots\ldots$ gegeben:

so muſs $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{B} = \frac{-2(a+b)+a}{3} = -\frac{a+2b}{3}$ seyn.

§. 40. *Dritter Lehrsatz.*

Wenn für die Reihe

$\mathfrak{C} = x+y+z+u + x+y+z+u + \ldots\ldots$

1tens, ausbedungen ist, daſs irgend einem Gliede ihrer viergliedrigen Perioden, ein unendlich

grosser Werth nicht beigelegt werden soll:
so muss ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = {}^{\infty-3}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$
seyn. Und wenn
2tens gegeben ist, dass allemal $x+y+z+u=0$ *seyn soll: so muss* ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$
(*auch* ${}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$, *auch* ${}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ *und* ${}^{\infty-3}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$) $= \frac{3x+2y+1z}{4}$
seyn.

§. 41. *Beweis.*

Wenn ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = \frac{\infty-1}{4}x + \frac{\infty-1}{4}y + \frac{\infty-1}{4}z + \frac{\infty-1}{4}u + x$ als die Reihe mit überendlicher Gliederzahl angenommen wird: so muss

$${}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = \frac{\infty-1}{4}x + \frac{\infty-1}{4}y + \frac{\infty-1}{4}z + \frac{\infty-1}{4}u$$

$${}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = \frac{\infty-2}{4}x + \frac{\infty-2}{4}y + \frac{\infty-2}{4}z + \frac{\infty-2}{4}u + x + y + z$$

$${}^{\infty-3}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = \frac{\infty-3}{4}x + \frac{\infty-3}{4}y + \frac{\infty-3}{4}z + \frac{\infty-3}{4}u + x + y$$

seyn;

folglich z. B. das Verhältniss ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{E} : {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$

$$= 1 - \frac{x}{\infty} + 1 - \frac{y}{\infty} + 1 - \frac{z}{\infty} + 1 - \frac{u}{\infty} + \frac{4x}{\infty} : 1 - \frac{x}{\infty} + 1 - \frac{y}{\infty} + 1 - \frac{z}{\infty} + 1 - \frac{u}{\infty} + \frac{4x+4y}{\infty}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 : 1 + 1 + 1 + 1 = 1 : 1$$

also ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ seyn. Da nun eben so auch ${}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{E} = {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ und $= {}^{\infty-3}\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ erweisbar ist; indem bei allen nicht unendlich grossen Werthen

des x, y und z, sowohl $\frac{4x}{\infty}$ als $\frac{4x+4y}{\infty}$ als $\frac{4x+4y+4z}{\infty}$ allemal $=$ o geworden seyn muſs: so hat man erwiesen

daſs $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \infty^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \infty^{-2}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \infty^{-3}\mathfrak{S}\mathfrak{C}$ geworden seyn muſs; welches das 1ste war, und für alle, irgend beliebige Werthe der vier Glieder x, y, z und u, nur daſs kein unendlich groſser darunter sey, erwiesen ist und bleibt.

Wird nun aber auch die 2te Bedingung des Lehrsatzes hinzu genommen; nach welcher keine anderen als solche Werthe der vier Gröſsen, x, y, z und u, gestattet werden, deren Summe ganz genau $=$ o ist: so folgt aus dieser Bedingung,

$$
\begin{aligned}
\text{daſs }\ \infty\mathfrak{S}\mathfrak{C} &= x \\
\infty^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{C} &= o \\
\infty^{-2}\mathfrak{S}\mathfrak{C} &= x+y+z \\
\text{und }\ \infty^{-3}\mathfrak{S}\mathfrak{C} &= x+y\,;
\end{aligned}
$$

folglich

$$\infty\mathfrak{S}\mathfrak{C} + \infty^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{C} + \infty^{-2}\mathfrak{S}\mathfrak{C} + \infty^{-3}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = 3x + 2x + 1.z$$

seyn muſs.

Vollkommen richtig kann und muſs die Summe dieser vier Gröſsen in der linken Gleichungsseite, obgleich jede derselben eine unendliche Anzahl von Gliedern in sich faſst, dennoch durch die endliche Gröſse der rechten Seite bestimmt werden; weil ja jede von dieser unendlichen Gliedermenge, für sich selbst zusammen addirt, ihren Ertrag $=$ o gibt.

Wenn wir nun aber auch verlangen, die linke Seite dieser Gleichung z. B. durch lauter $\infty\mathfrak{S}\mathfrak{C}$ ausgedrückt zu sehen: so müssen wir bedenken, daſs wegen der eben erwähnten unendlichen Anzahl

von Gliedern, bei allen endlichen Werthen der x, y, z und u, folglich auch bei denen, welche $x + y + z + u = o$ geben,

$$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = {}^{\infty-3}\mathfrak{S}\mathfrak{C},$$

folglich $4 \cdot {}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = 3x + 2y + 1.z$,

$$\text{also } {}^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \frac{3x + 2y + 1.z}{4} \text{ seyn mufs.}$$

§. 42. $(n-1)$ter *Lehrsatz.*

Wenn eine unendlich fortgesetzte Reihe $\mathfrak{R}$

1tens aus n*-gliedrigen Perioden* $x + y + z \ldots + v + w$ *besteht, und keinem von diesen* n *Gliedern ein unendlich grosser Werth beigelegt ist: so muss*

$$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{R} = {}^{\infty-1}\mathfrak{S}\mathfrak{R} = {}^{\infty-2}\mathfrak{S}\mathfrak{R} \ldots = {}^{\infty-(n-1)}\mathfrak{S}\mathfrak{R} = {}^{\infty-n}\mathfrak{S}\mathfrak{R}$$

seyn. Und wenn

2tens für die n *einzelen Glieder der Periode, nur solche Werthe gestattet werden, bei welchen der ganze Ertrag einer Periode* $= o$ *ist: so muss auch*

$$^{\infty}\mathfrak{S}\mathfrak{R} = \frac{(n-1).x + (n-2)y + \ldots + 1.v}{n} \textit{ seyn.}$$

§. 43. *Der Beweis*

dieses allgemeinen Lehrsatzes ist am deutlichsten einzusehen, wenn man die Voraussetzungen, Schlüsse und Resultate, in dem 1ten, 2ten und 3ten Lehrsatze mit einander vergleicht; daher man sich die mühsame Darstellung einer allgemeinen Induction ersparen kann.

§. 44. Hiemit ist nun die merkwürdige Lehre, welche (nach §. 14.) Lagrange als Berichtigung

und Erweiterung der Leibnitzischen Behauptung aufgestellt hat, nicht nur mit neuer und allgemeiner Bestimmung ausgedrückt, sondern auch, meines Erachtens, bündig erwiesen; da hingegen bei Lagrange von keinem Beweise die Rede ist. Indem er auch dabei die *functio generatrix* als bekannt, und dann überdies ohne allen Zweifel voraussetzt, daſs die Gleichheit zwischen ihr und der von ihr erzeugten Tochter, vermittelst der Ergänzung erweisbar sey: so habe ich dagegen bei meinem Erweise nicht die (oftmals unbekannte) Mutterfunction in Requisition genommen, auch von der *petitio principii*, dem Erweise durch die Ergänzung, keinen Gebrauch gemacht. Ueberdies würde nun auch gegen diese Beweisart die bekannte Regel der Logik aufzustellen seyn, daſs nichts beweisend ist, was zu viel beweiset; indem ja, wenn z. B. der Satz

$$A = \frac{x}{1+1} = x - x + x - x \ldots = \frac{x}{2} \text{ durch}$$

die Ergänzung erweisbar wäre, er auch für unendlich groſse Werthe des x richtig seyn müſste! da er doch nach unserm obigen Erweise nur unter der Bedingung erweisbar ist, daſs dem x nur solche Werthe beigelegt seyen, bei welchen

$$1 + \frac{x}{\infty} = 1 + 0 = 1 \text{ ist.}$$

Nur dann wenn das noch immerfort gröſser werdende $^{\infty}$ⓈA zwischen einem $= 0$ und einem endlichen Werthe des x. unendliche mahl hin und her wechselnd ist, kann es $= \frac{x}{2}$ werdend seyn.

§. 45. Wenn einige Infinitesimalisten immer nur ein ∞, nicht auch ein ∞ zugestehen wollen: so

kann ich, wie schon gesagt, in Hinsicht des hier behandelten Satzes, und so lange man durch die Reihe lediglich diskrete Zahlgröfsen behandelt verlangt, nichts dawider haben. Denn obgleich hiedurch nur erwiesen werden kann, dafs bei immerfort wachsender Gliederzahl des $^{\infty}$SA, der Werth desselben dem $= \frac{x}{2}$ immerfort nähernd ist; so kann man doch allerdings behaupten, dafs, wenn der Werth des $^{\infty}$SA calculatorisch angegeben werden soll, es anders als durch $\frac{x}{2}$ nicht geschehen kann. (Diff. R. III. §. 12. 13.)

§. 46. Die Finalisten aber werden es nunmehr einzusehen genöthigt seyn, warum sich selbst auch von dem so bekannten Satze, dafs $^{\infty}$SA $= \frac{x}{2}$ seyn mufs, ein bündiger Beweis nicht geben läfst, wenn man nicht für das Unendlichgrofse und Unendlichkleine genaue Begriffe sich absichtlich und sorgfältig aufgestellt hat, und aus denselben für diese Lehre unmittelbar zu schliefsen weifs.

§. 47. Gegen alle mir bisher bekannt gewordene Reihen-Theorie, würde ich in Hinsicht der hier von mir behandelten folgendes noch zu erinnern haben. Selbst auch wenn man sich bei der Abtheilung in convergente und divergente Reihe mit der vorzüglichen Sorgfalt Eines E y t e l w e i n ausgedrückt hat: so bleibt doch z. B. für die

Reihe A $= + x - x + x - x$ ..... es gewifs, dafs man dieselbe für convergent zu erklären, nicht eher und anders veranlafst und berechtigt seyn kann, als bis man ihr $^{\infty}$SA $= \frac{x}{2}$ schon erwiesen hat;

folglich ebenfalls ein Cirkel im Beweise begangen wird, wenn man behauptet, daſs diese Reihe, deshalb, weil sie convergent ist, ihrem Urbruche $\frac{1}{1+1}$ wirklich gleich seyn müsse.

§. 48. Wie sich die graphische Darstellung der parallelen Reihen (Vorerinner. XII. §. 5.) zu ihrer anschaulichen Summirung benutzen, auch aus dieser genauen Summirung auf die annäherende Summirung parallel werdender Reihen anwenden lasse, kann ich mir, umständlicher zu erörtern, hier nicht erlauben.

Vierzehnte Vorerinnerung.

Verbesserungen und Druckfehler.

Zu denen für den ersten Band der Differentialrechnung bereits dort angezeigten Verbesserungen habe ich noch folgende nachzutragen.

Seite	Zeile		statt	ist zu lesen:
19	12	von oben	$=(3x^2\triangle x)$	„ $(3x^2\triangle x)^2$
41	7	„ „	$\frac{dX}{dx}$	„ $\frac{dX}{dx}=p$
58	8	„ „	dx	„ dX
61	1	von unten	x	„ p
71	12	„ „	Da dann	„ Da
84	4	„ „	dx^n	„ $d.x^n$
85	4	von oben	dx^3	„ $d.x^3$
95	12	„ „	$dx\,2=2\,dx$	„ $dx.2x=2x\,dx$
118	13	von unten	dU,	„ dU, uns ${}^x dU+{}^y dU+{}^z dU$ bedeutend
144	10	von oben	$=\frac{1.\cos\varphi}{\sin\varphi^2}$	„ $=-\frac{1.\cos\varphi}{\sin\varphi^2}$
155	13	„ „	$\sqrt{}aa-zz$	„ $\sqrt{}(aa-zz)$
213	3	von unten	bloſs	„ schon
214	7	von oben	dx	„ d lx
219	8	„ „	$xx-1$	„ $xx.(-1)$
220	9	von unten	heroistisch	„ hevristisch
292	13	„ „	gröſster kleinster	„ kleinster gröſster

Im zweiten Bande.

Seite	Zeile			statt	ist	zu lesen:
32	3	von	oben	dy ddy	ꝛ	dx ddy
73	6	von	unten	$3^y d^y d^x dU$	ꝛ	$3^x d^y d^y dU$
124	14	von	oben	Anmerkung	ꝛ	Anwendung
125	12	ꝛ	ꝛ	also	ꝛ	also algebraisch
128	3	ꝛ	ꝛ	$\frac{b}{r}$	ꝛ	$\frac{c}{r}$
132	4	von	unten	bx	ꝛ	bf
143	14	ꝛ	ꝛ	$x = o$	ꝛ	$u = o$
ꝛ	ꝛ	ꝛ	ꝛ	$x = o$	ꝛ	$u = o$

In diesem Bande der Integralrechnung.

Seite	Zeile			statt	ist	zu lesen:
14	9	von	oben	X^o	ꝛ	x^o
31	21	ꝛ	ꝛ	geographisch	ꝛ	geometrisch
36	10	von	unten	§. 21	ꝛ	§. 29
43	3	von	oben	Fig. 2	ꝛ	Fig. 12
45	11	von	unten	Fig. 15	ꝛ	Fig. 13
46	17	ꝛ	ꝛ	Fig. 17	ꝛ	Fig. 15
49	1	von	oben	Fig. 19	ꝛ	Fig. 18
51	3	ꝛ	ꝛ	$= a^2$	ꝛ	$= a$
64	7	von	unten	x	ꝛ	X
67	7	von	oben	x	ꝛ	v
68	4	ꝛ	ꝛ	xsin	ꝛ	vsin
81	8	von	unten	dem	ꝛ	den

Seite	Zeile		statt	ist zu lesen:
86	7	von unten	enthalten	⸗ enthaltend
97	3	von oben	$-($	⸗ $(-$
109	9	⸗ ⸗	$= M$	⸗ $= -M$
124	5	von unten	bx	⸗ bx^n
157	7	⸗ ⸗	by	⸗ $b\,ly$
174	9	von oben	u. h	⸗ und h
⸗	19	⸗ ⸗	$n = h$	⸗ $h = n$
186	9	von unten	$\log \overline{a}$	⸗ $\log \overline{x}$
187	2	von oben	$\frac{1}{b}$	⸗ $-\frac{1}{b}$
⸗	4	⸗ ⸗	bC	⸗ $-bC$
192	6	⸗ ⸗	β	⸗ βx
195	9	von unten	$= \frac{\mathfrak{a}}{\alpha}$	⸗ $\frac{M}{N} = \frac{\mathfrak{a}}{\alpha}$
227	5	⸗ ⸗	= ſ	⸗ = − ſ
⸗	4	⸗ ⸗	= ſ	⸗ = − ſ
228	5 u. 6	von oben	= ſ	⸗ = − ſ
⸗	7 u. 8	⸗ ⸗	= − ſ	⸗ = + ſ
278	12	⸗ ⸗	$= 3$	⸗ $= 4$
279	3	⸗ ⸗	EQN	⸗ BQN
282	10	⸗ ⸗	EM𝔘	⸗ BM𝔘
327 bis 336	im Seiten-Titel		XVIII	⸗ XVII

Seite	Zeile		statt	ist zu lesen:
365	7	von unten	$^{1}\varphi$	„ $(\mp)\varphi$
372	9	von oben	vorkommen	„ vorkommen können
376	16	„ „	$\varphi^{\frac{1}{8}}$	„ $\varphi^{\frac{1}{3}}$

Anmerk. Zur Seite 71, §. 33 und 34, ist durch Versehen eine Anmerkung ungedruckt geblieben, in welcher der gemeinschaftlichen Theorie zweier sehr achtungswürdigen Männer, Abicht und Langsdorf, erwähnt wurde. Abicht hatte sie veranlaſst, nämlich die in §. 34 erwähnten nicht Euklidischen Puncte behauptet, und Hr. Langsdorf sie angewandt. Meines Erachtens hätte dieser Mathematiker jenem Philosophen sogleich erwiedern sollen: die unendliche Theilbarbeit jeder stetigen Gröſse sey (vermittelst der Euklidischen Linie, und ausgemacht richtiger geometrischer Lehren) den Mathematikern so evident und bündig erwiesen, daſs bei diesen keine, noch so philosophisch ausgedrückten und ausgezierten Schlüsse ihr Glück zu machen im Stande seyn könnten und müſsten, wenn sie jenen Euklidischen Lehren widersprechend wären.

Einige von den Widerlegungen, welche gegen die neue Theorie aufgestellt wurden, findet man in der Vorrede zu des Hrn. Langsdorf Grundlehren der mechanischen Wissenschaften, Erlangen 1802, mit gerechtem Unwillen zurück gewiesen. In diesem Buche sind vermittelst der so genannten Raumpuncte mehre Aufgaben consequent gelöset. Daſs dieses geschehen könne, ist mir schon dadurch gewiſs, weil es eben so auch vermittelst eines $dx = \frac{x^{0}}{\infty}$ geschehen könnte welches auch noch immer einige Gröſse des x in

sich hat. Dessen ungeachtet aber bleibt es mir gewiſs, daſs in der Wirklichkeit das stetige x unendlich theilbar seyn muſs, und man zur völligen Strenge im Schlieſsen $dx = \frac{x^0}{\infty} = 0$ geworden fordern muſs.

Meinem Systeme gemäſs, ist und bleibt der Euklidische Punct an Raumgröſse ein völliges Nichts unter allen Umständen; ist und bleibt aber, als Ortsbestimmung, die reinste Ortsbestimmung, welche es geben kann, weil er nur einen einzigen Ort bestimmt.

Soll $\tang \varphi$ als $\frac{dy}{dx}$ durch Differentialrechnung gefunden werden, so wird es calculatorisch völlig genau durch $\frac{dy}{dx} = p$ gefunden, wenn man dx als lineäre Gröſse zu einem völligen Nichts geworden fordert, wodurch auch dy allemal ein völliges lineäres Nichts geworden seyn muſs. Damit aber besteht nun gar wohl, daſs z. B., wo $p = 3$ sich ergibt, im dy drei Ortsbestimmungen, drei Puncte, in einen einzigen sich vereinigt haben müssen, wenn man dx zu einem einzigen Puncte geworden fordert.

Für $\tang \varphi = \tang 90^0$ würde sich eine unendliche Menge von Ortsbestimmungen in eine einzige vereinigt haben müssen, wenn im $\tang \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\infty}{1}$ mit $dx = 0$, auch $dy = 0$, auch dy, als Längengröſse, $= 0$ geworden ist.

In der Differentialrechnung ist zur Auffindung des $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = p$, lediglich das Verhältniſs zwischen den Anzahlen der, im lineären $dx = 0$, und lineären $dy = 0$, sich vereinigten Ortsbestimmungen zu beachten; in der Integralrechnung aber kommt das dx als ein Etwas, als eine Ortsbestimmung in Betracht, welche ebenfalls dadurch nachgewiesen wird, daſs man das lineäre dx bis zum völligen lineären Nichts hat abnehmen lassen.

Integralrechnung.

Erstes Capitel.

Hauptregeln des algebraischen Integrirens.

Erklärung.

§. 1. Integriren heifst überhaupt für eine gegebne Differenz die Functionen angeben, aus welchen sie entstehen kann. In seinem gewöhnlichsten engern Sinne aber heifst es, für ein gegebnes Differential die Functionen angeben, aus welchen solches Differential entsehen kann; wobei sich nach und nach ergeben wird, dafs die mehren Functionen, welche einem und demselben Differential zugehören, lediglich durch constante Gröfsen von einander verschieden seyn können; z. B. vermittelst eines constanten Gliedes, bei algebraischem Integriren; vermittelst eines constanten Factors, bei logarithmischem Integriren; und bei noch anderen transcendenten Operationen, auch vermittelst solcher Constanten, die noch anders, als durch Addition und Multiplication, mit der veränderlichen Gröfse des Integrales verbunden seyn können. (Absichtlich habe ich hier die Operationen des Integrirens selbst, als algebraisch und logarithmisch, oder trigonometrisch u. s. w. unterscheiden wollen. Denn obgleich, um in der Kürze durch ein Beispiel mich zu erklären, $a.(\log x)^2\, d \log x$, allerdings eine transcendente, logarithmische Gröfse ist: so wird sie gleichwohl als

ein algebraisches Differential zu integriren seyn, und uns dadurch das Integral $(\log. x)^3$ angeben müssen.)

Zusatz.

§. 2. Indem wir der obigen Erklärung ausdrücklich hinzufügen, daſs dabei die genaue Gröſse des Differentials (Diff. R. II, §. 14.) zu verstehen seyn soll: so können wir auch die anschauliche dimensorische Erklärung aufführen, daſs man in der Integralrechnung aus den vorgegebnen Differentialquotienten, als veränderlichen Endgränzen einer Function, auf die Functionen selbst zu schlieſsen sucht, welche solchen veränderlichen Endgränzen zugehören; wobei sich denn auch anschaulich ergeben wird, daſs die erwähnten constanten Gröſsen, welche bei einerlei vorgegebnem Differential noch verschieden seyn können, durch die jedesmaligen verlangten Anfangsgränzen der Function bestimmt werden; welche übrigens bisweilen mit gegeben sind, bisweilen auch nach Belieben oder Bedürfniſs gefordert werden. (Diese zweite, dimensorische Erklärung werden wir im nächsten Kapitel erläutern, in diesem ersten aber bloſs auf die erste calculatorische Definition uns beziehen.)

§. 3. Wer es weiſs, daſs aus der Function $X = x^3$, ihr x mit Δx belegt,
sich $X^1 = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$ ergeben,
und daher $\Delta X = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$ übrig bleiben muſs, der wird, wenn diese Differenz ihm vorgelegt wird, vermittelst seines Gedächtnisses, sogleich zu integriren wissen; da er zuvörderst anzugeben weiſs, daſs $X = x^3$ eine Function sey, aus welcher diese Differenz entstehen könne. Ueberdies aber wird er auch bald wissen, daſs die

vorgegebne dreigliedrige Differenz, falls sie nur eine einzige e r s t e Differenz ausmachen soll, gerade nur aus der von ihm angegebnen Function $X = x^3$, oder doch nur einer solchen $= x^3 + C$, entstanden seyn könne, die von der $X = x^3$ lediglich dadurch verschieden ist, daſs sie auch ein constantes (bejahtes oder verneintes, oder auch unmögliches) Glied C enthält, welches freilich eben deshalb, weil es kein x in sich hat, in der Differenz keine Spur von sich lassen kann. (Diff. R. VI. §. 27.)

§. 4. Ja, wenn man uns statt der vollständigen Differenz lediglich ihr erstes Glied $3x^2 \triangle x$ vor Augen legte: so würde schon dieses uns hinreichend seyn zu versichern, daſs die Function, aus welcher es entstehen könnte, unter den Functionen $x^3 + C$ zu suchen sey.

Auch das zweite Glied $3x \triangle x^2$ würde uns zu eben der Entscheidung hinreichen, wenn man uns hinzufügte, entweder, daſs es gerade ein zweites Glied aus der geordneten Differenz sey, oder doch, daſs es irgend ein Glied aus einer e r s t e n Differenz sey.

Wenn aber dergleichen nicht hinzugefügt wäre, so würden wir allerdings ungewiſs bleiben, ob das gegebne Glied, als ein zweites der ersten Differenz aus der Fnnction $x^3 + C$ entstanden sey, oder ob es etwa das erste Glied einer zweiten Differenz ausmachen, und daher aus der Function $\frac{1}{2} x^3 + C$ entstanden seyn müsse. Denn $X = \frac{1}{2} x^3 + C$ gesetzt, würde $\triangle x = \frac{3}{2} x^2 \triangle x + \ldots$ und $\triangle\triangle X = 3x \triangle x^2 + \ldots$ geben.

§. 5. Sey uns dagegen $3x^2$ als der Differentialquotient $\frac{dX}{dx}$ einer Function X gegeben, so ist uns eben dadurch auch schon gewiſs, daſs $3x^2 dx$ das erste Glied in dem noch werdenden geordneten Differentiale der Function seyn muſs. Denn alle etwanigen nachfolgenden Glieder desselben muſsten ja gänzlich verschwindend seyn; indem man, nach vorhergegangener Division mit dx, allemal durch $dx = 0$ auf den genauen Differentialquotienten, und das mit ihm bestimmte genaue Differential zu schlieſsen hatte.

Sey uns nun überdieſs gewiſs, daſs gerade von einem ersten Differentialquotienten die Rede sey, nicht auch von einem zweiten oder dritten ... z. B. wenn nicht $\frac{ddX}{dx^2} = 3x^2$, nicht $\frac{dddX}{dx^3} = 3x^2$, sondern gerade $\frac{dX}{dx} = 3x^2$ uns gegeben ist: so sind wir dadurch völlig gewiſs, daſs $3x^2 dx$ gerade das erste Glied des genauen, noch formvollständigen ersten Differentiales der Function sey, folglich $3x^2 \triangle x$ auch das erste Glied ihrer ersten allgemeinen Differenz abgeben würde (Diff. R. I. §. 10.); und wir werden daher aus dem gegebnen $\frac{dX}{dx} = 3x^2$, oder eigentlich aus der daraus folgenden genauen Gröſse des Differentials $dX = 3x^2 dx$, als erstem Gliede der formvollständigen Reihe $dX = 3x^2 dx + 3x dx^2 + dx^3$, nicht nur eben so sicher, wie vorhin in §. 4. aus dem ersten Gliede des $\triangle X = 3x^2 \triangle x + 3x \triangle x^2 + \triangle x^3$ schlieſsen können, daſs die Function gerade ein $x^3 + C$ seyn muſs; sondern die ganze Schluſsfolge wird auch kürzer und netter durch sich selbst gefaſst, weil alle dafür entbehrlichen Glieder des formvollständigen Differentiales, schon

bei der Gröſsen-Bestimmung des Differentialquotienten, durch sein $dx = o$ vernichtet, also alle Glieder, welche zu dem Schlusse nicht nothwendig sind, dem Auge entrückt wurden.

§. 6. Eben so werden wir, da uns aus Diff. Rechn. VI. §. 1. die Reihe

$$\Delta . x^n = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n.n-1.}{1.n} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} x^{n-3} \Delta x^3 + \ldots$$

bekannt ist, aus einem gegebnen $\frac{dX}{dx} = nx^{n-1}$, oder eigentlich aus dem dadurch gegebnen genauen Differential $d.x^n = nx^{n-1} dx$, als erstem Gliede der formvollständigen Reihe

$d.x^n = nx^{n-1} dx + \frac{n.n-1.}{1.2} x^{n-2} dx^2 + \ldots$ es schlieſsen, daſs die verlangte Function X, aus welcher dieses genaue Differential sich ergeben könne, ein $X = x^n + C$ seyn muſs.

§. 7. Da n hierin jede beliebige, nur nicht mit x veränderliche Gröſse, seyn kann (Diff. R. I. §. 6.): so kann sie auch $n+1$ seyn; und wird daher aus einem gegebnen $dX = (n+1) x^n dx$ eben so gefolgert, daſs $X = x^{n+1} + C$ seyn muſs.

Und ein gegebnes $dX = b.x^n dx$, werden wir uns als ein $\frac{b}{n+1} . (n+1) x^n dx$ vorstellen, um daraus sogleich abzunehmen, daſs $X = \frac{b}{n+1} x^{n+1} + C$ seyn muſs, (vorausgesetzt, daſs $bx^n dx$ als algebraisches Differential vorkommen könne, welches für das einzige $n = -1$ nicht Statt finden würde, wie wir es bald erörtern werden.)

§. 8. Aus dem hier befolgten Gange, von dem Differentiale $n x^{n-1} dx$ auf die Function $x^n + C$ zurück zu schliefsen, liegt es vor Augen, dafs dabei nicht aus dem Gröfsen-Ertrage des genauen Differentials $n x^{n-1} dx$, welcher als $n x^{n-1} . o$ auch $= o$ seyn mufs, sondern aus der Gröfsenform $n x^{n-1} dx$ geschlossen wird, welche in der allgemeinen Differenz $n x^{n-1} \triangle x$ durchaus dieselbe seyn und bleiben würde, auch wenn man sich, z. B. bei einem linearen x, die Belegung $\triangle x$, viele Meilen lang denken wollte.

Demnach wurde hier den genauen, zu $= o$ gewordenen Differentialen, vor denen noch $= o$ werdenden, oder sogar endlichen Differenzen, lediglich defshalb der Vorzug gegeben, weil sie uns bei weiten am nettesten, kürzesten und sichersten, eine uns nothwendige Form völlig rein, und zwar sogleich die schicklichste unter allen, die Form des ersten Gliedes in der ersten Differenz einliefern. (Und in noch gröfserer Maafse würden diese wirklich zu $= o$ gewordenen Differentialen ihren Vorzug vor den übrigen noch unendlich kleinen, oder sogar den endlichen Differenzen behaupten, wo wir etwa aus der Form der zweiten Differenzen auf die Function zu schliefsen suchen müfsten.)

Wenn wir aber, in dem IIten Kapitel, die andere, dimensorische Erklärung (§. 2.) näher erörtern, nach welcher aus den veränderlichen Endgränzen der Function auf die Function zu schliefsen ist: so wird es ganz eigentlich anschaulich werden, dafs man, um mit voller Bündigkeit und Schärfe auf das Integral zu schliefsen, ganz nothwendig völlig $= o$ gewordene Differentiale fordern mufs.

§. 9. Obgleich am deutlichsten erst aus dieser eben erwähnten Erörterung es sich ergeben kann,

wie in dem formularen Integral-Ausdrucke, der veränderliche Theil desselben, aus welcher man aus der Form des Differentiales, durch die ihr zugehörige Integrirungsregel, zu schliefsen hat, allerdings in der Summe unendlich vieler veränderlicher Endgränzen bestehen mufs, die wahre Gröfse dieser Summe aber ohne eine festgesetzte Anfangsgränze nicht bestimmt werden kann: so wird es doch erlaubt und rathsam seyn, eine gewöhnliche Sprache und Bezeichnung der Analysten sogleich nach folgender Erklärung zu gebrauchen.

§. 10. In so fern X als diejenige Function betrachtet wird, welcher ein vorgegebnes Differential dX zugehört, in so fern wird sie das *Integral* der dX genannt, und durch ∫dX bezeichnet; dafs also das ∫ eine *geforderte Integrirung* bedeutet.

§. 11. Indem man aber die Folgerung aus $dX = bx^n dx$ in §. 7., als die Behauptung aufzuführen pflegt, dafs dem algebraischen Differentiale $dX = bx^n dx$ das Integral $\int dX = \frac{b}{n+1} x^{n+1} + C$ zugehören müsse: so wollen wir doch dieser Gewohnheit die Bemerkung hinzufügen, dafs man eigentlich, $\int dX = \frac{b}{n+1} x^{n+1}$, folglich

$X = \frac{b}{n+1} x^{n+1} + C$ schreiben sollte; weil ja nur der erste veränderliche Theil dieses formularen Ausdruckes aus der Veränderlichkeit des x kann gefolgert werden; der constante Theil desselben dagegen durch einen für sich gegebenen, oder geforderten, constanten Anfang des X zu bestimmen übrig bleibt.

Erste Hauptregel des algebraischen Integrirens.

§. 12. Noch kürzer schreibt man, daſs $\int b x^n dx = \frac{b}{n+1} x^{n+1} + C$ ist, nämlich das Integral des dem Integrirungs-Zeichen ſ hier unterworfenen Differentiales, ist gleich einer Function des x, welche aus dem Differentiale sich ergibt, wenn man die in demselben vorkommende Potenz x^n um einen ganzen bejahten Grad erhöht, diese erhöhte Potenz durch die erhöhte Gradzahl $n+1$ dividirt, den etwanigen constanten Factor b des Differentiales beibehält, dx aber wegläſst, und noch $+C$ hinzufügt, um anzudeuten, daſs die Function, aus welcher das Diferential entstanden seyn mag, auch noch ein mit x nicht veränderliches Glied gehabt haben kann.

§. 13. *Der calculatorische Beweis*

dieser Regel kann und muſs, der calculatorishen Difinition (§. 1.) gemäſs, lediglich darin bestehen, daſs für die als $\int dX$ aufgefundene Function $X = \frac{b}{n+1} x^{n+1} + C$ allerdings sich

$dX = \frac{b}{n+1} (n+1) x^{n+1} dx = b x^n dx$ als ihr genaues algebraisches Differential ergibt; womit also, wie in der Regel selbst, vorausgesetzt wird, daſs dieses X auch wirklich eine algebraische Function seyn könne. Hiezu wird aber

1) erfordert, daſs der Exponent $n+1$, also auch n, keine mit x veränderliche, sondern eine vom

x unabhängige, in dieser Hinsicht also constante Gröſse sey; und überdies wird dazu

2) erfordert, daſs n nicht $= -1$ gegeben sey.

§. 14. Das 1ste Erforderniſs muſs allerdings als mit gegeben und wirklich vorhanden, schon anerkannt seyn, wenn man überhaupt vermittelt der obigen Regel des **algebraischen** Integrirens ein verlangtes $\int b x^n dx$ zu suchen veranlaſst seyn soll.

Das 2te Erforderniſs aber ist darum nöthig, weil ja $\frac{b}{n+1} x^{n+1}$ für den Werthfall $n = -1$ ein $= \frac{b}{0} x^0$, also keine mit x veränderliche Gröſse, keine Function des veränderlichen x seyn würde. Denn da $x^0 = 1$ ist, so muſs auch $\frac{1}{0} . x^0 = \infty . 1$, also immerfort eine von der Veränderlichkeit des x unabhängige Gröſse bleiben.

Damit stimmt nun sehr gut überein, was wir schon in der Differentialrechnung bemerkt haben, daſs das Differential $x^n dx$, für $n = -1$, also das Differential $x^{-1} dx$, als **algebraisches** Differential gar nicht vorkommen kann; und wir uns daher noch umzusehen haben, ob es irgend ein transcendentes Differential etwa ausmachen möchte!

Zusatz zur obigen Hauptregel. (§. 12.)

§. 15. **Wenn man, in der Meinung, ein vorgegebnes Differential als algebraisches integriren zu können, auf den Ausdruck $\frac{x^0}{0}$ gekommen ist: so kann statt dessen, $\log x$, als der veränderliche Theil des verlangten Integrales angesetzt werden.**

Denn auf solchen Ausdruck würden wir in Befolgung der obigen Hauptregel, durch die Schlüsse $\int\frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0}$ gekommen seyn.

Da wir nun aus Diff. R. XI. §. 2. und 4. schon wissen, daſs $d\log x = \frac{dx}{x}$, also $\log x$ eine Function ist, welcher $\frac{dx}{x}$ als Differential zugehört: so sind wir eben dadurch nach §. 3. auch allerdings schon gewiſs, daſs $\int\frac{dx}{x} = \log x$ seyn muſs; nämlich $\log x$ den veränderlichen Theil einer jeden Function ausmachen muſs, deren Differential sich als $\frac{dx}{x}$ ergeben habe.

Da aber nicht nur $d\log x = \frac{dx}{x}$, sondern auch jedes $d(\log x + C) = \frac{dx}{x}$ ist, C mag seyn, welche constante, mit x nicht veränderliche Gröſse es will: so pflegt man rathsamer im Allgemeinen anzusetzen, daſs $\int\frac{dx}{x} = \log x + C$ sey, Soll auch hiebei es ausdrücklich erinnert werden, daſs C allemal eine dem $\log x$ gleichartige Gröſse seyn muſs: so schreibt man, $\int\frac{dx}{x} = \log x + \log c$; dessen c nun wieder im Allgemeinen jede von x unabhängige, und in so fern constante Gröſse bedeuten soll.

Welches $C = \log c$ dem jedesmaligen Anwendungs-Falle des aufgefundenen Integrales entweder nothwendig zugehöre, oder schicklich zugefügt werden könne, muſs aus den Umständen der Aufgabe

beurtheilt werden, wie wir es gehörigen Ortes nach und nach beibringen werden.

Anmerkung.

§. 16. Obgleich der Satz $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$ hiemit bündig allerdings erwiesen ist: so werden doch umsichtige Calculatoren sich zu erörtern wünschen, wie es komme, daſs man hier, wo man es mit $\int x^{-1}\, dx$ als einem einzelen Falle des $\int x^n\, dx$, als einer algebraischen Function zu thun haben wollte, gleichwohl die logarithmische Function $\log x$ herbei zu nehmen genöthigt sey! Freilich ist es sehr einleuchtend, daſs $x^{-1}\, dx$ als ein Differential der algebraischen Function x^n sich gar nicht ergeben könne, sondern das allgemeine $d.x^n = n x^{n-1}\, dx$, für $n = 0$ nur als $= 0 . x^{-1}\, dx = 0 . \frac{dx}{x}$, also als gar nicht vorhanden sich angeben müsse; immerhin aber wird man doch die Verbindung zwischen diesem $0 . \frac{dx}{x}$ und dem wirklich vorhandenen $1 . \frac{dx}{x} = d \log x$ einzusehen wünschen.

§. 17. Wenn $h = 2,7182818\ldots$, also h die Basis des natürlichen Logarithmensystemes, und $z = \log x$ bedeutet: so muſs $x = h^z$, folglich auch $x^n = h^{zn}$ seyn. Sey nun n constant: so haben wir hiemit die algebraische Function x^n durch eine exponentiale h^{nz} ausgedrückt, indem zwar die Stammgröſse h constant, der Exponent nz aber, auch bei constantem n, mit $z = \log x$, also auch mit x veränderlich ist.

Da wir nun $d.x^n = n x^{n-1}\, dx$ (Diff. R. VI. §. 1.) für jedes constante n, und wir ferner

$$d.h^{nz} = n h^{nz}\, dz \text{ [Diff. R. XII. §. 5. (7)]}$$

für ein constantes n, und veränderliches z haben:
so muſs auch $n x^{n-1} dx = n h^{nz} dz$,
das ist $n x^{n-1} dx = n x^n d \log x$ seyn.

Für $n = 0$ gibt diese Gleichung,
$0 . \frac{dx}{x} = 0 . 1 . d \log x$, also das Differential des algebraischen x^n nicht nur, sondern auch des exponentialen $h^{nz} = x^n$ ebenfalls, als nicht vorhanden an.

Für $n = 1$ aber gibt sie $1 . X^0 . dx = 1 . x^1 d \log x$
das ist $1 . dx = x d \log x$.
(Auch mag man hier an Diff. R. XII. §. 20. zurück denken.)

§. 18. Da hieraus erhellet, daſs wir die Gleichung $dx = x d \log x$, aus der allgemeinen Gleichung $x^n = h^{nz}$ gefolgert, nicht dem Falle $x^0 = h^{0.z}$, sondern dem Falle $x^1 = h^{1.z}$ zu verdanken haben, und indem dx das Differential der algebraischen Function x^n für den einzelen Fall $n = 1$ ist, dagegen $x d \log x$ die Gröſse des $d . h^{nz}$ für den einzelen Fall $1 . z$ der veränderlichen Gröſse nz ist: so dürften eben hiemit sich manche hiebei vorkommende Aeuſserungen einiger berühmten Lehrbücher, als nicht ganz richtig oder treffend, zurück gewiesen finden; namentlich auch die bekannte Behauptung, daſs
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{c^{n+1}}{n+1}$ ein allgemein richtiger, auch für $n = -1$ richtiger Ausdruck sey.

§. 19. *Beispiele für die Hauptregel* §. 10.

$$\int b x^n dx = \frac{b}{n+1} x^{n+1} + C.$$

Es ist $\int 3 x^2 dx = x^3 + C$; $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$;
$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = - \frac{1}{2 x^2}$; $\int x^{-2} dx = - x^{-1} = - \frac{1}{x}$.

Dafs auch hier, wie vorhin, allemal noch $+$ C, wegen der Constante hinzuzufügen sey, versteht sich von selbst.

$$\int 4 . \sqrt{x} . dx = \int 4 x^{\frac{1}{2}} dx = \int 4 . \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int a \sqrt[r]{x^n} . dx = \int a x^{\frac{n}{r}} dx = a \frac{r}{n+r} x^{\frac{n+r}{r}}$$

$$\int \frac{a}{f+g} \frac{dx}{x^7} = \int \frac{a}{f+g} . x^{-7} dx = \frac{a}{f+g} . \frac{1}{6} x^6 .$$

$$\int 3 (\sin \varphi)^2 d \sin \varphi = (\sin \varphi)^3 + C$$

$\int 2 (\log x)^3 d \log x = \frac{2}{4} (\log x)^4 + C$ bei Briggischen,

$\int 2 (\log x)^3 d \log x = \frac{2}{4} (\log x)^4 + C$ bei natürlichen Logarithmen.

Auch im letzten Beispiele wird man der Constante wegen am besten für's erste nur geradezu C anschreiben. Wo man dann nöthig findet, darauf zu achten, dafs diese constante Gröfse der übrigen veränderlichen gleichartig seyn mufs, wird man bisweilen $(\log c)^4$ noch besser als $\log c$ anzusetzen haben.

§. 20. Obgleich in den drei letzten Beispielen, die Stammgröfse selbst freilich trigonometrisch, oder logarithmisch transcendent ist: so ist sie doch, als eine Potenz mit constantem Exponenten, allerdings algebraisch functionirt, und als solche der obigen Regel gemäfs zu integriren.

Das Integrand $\int (\sin \varphi)^2 d \sin \varphi$ sowohl, als $\int (\log x)^3 d \log x$, ist der Form $\int x^n dx$ völlig unterworfen, auch wenn man diese Form so eingeschränkt versteht, dafs die S t a m m g r ö f s e s e l b s t zugleich die u r b e l e g t e veränderliche Gröfse seyn soll. Dafs aber Anfänger diese in der ersten Hauptregel aufgestellte Form so eingeschränkt verstehen, ist nicht

nur natürlich, sondern auch rathsam. Dies vorausgesetzt, ist es dann schicklich, und überdies für die Anwendung sehr erspriestlich, zuvörderst folgende erste Erweiterung der Hauptregel aufzustellen. Eine zweite Erweiterung wird in §. 23 aufgeführt werden.

Zweite Hauptregel des algebraischen Integrirens.

§. 21. Die bisher behandelte Regel, dafs jedes algebraische $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ seyn mufs, folgte daraus, dafs für jede wahre algebraische Function $x^{n+1} + C$ ihr Differential

$$d\,(x^{n+1} + C) = (n+1)\,x^n\,dx + 0 \text{ ist,}$$

also $\int (n+1)\,x^n\,dx = x^{n+1} + C$ seyn mufs, folglich auch, da $n + 1$ ein constanter Factor ist,

$$(n+1)\,.\int x^n\,dx = x^{n+1} + C, \text{ und daher}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{C}{n+1}$$ seyn mufs; wo man aber, wegen der uneingeschränkten Bedeutung des constanten C, statt $\frac{C}{n+1}$, auch C schreiben kann.

Da nun, auch wenn X nicht gerade $= x$, sondern irgend eine andere Function des x ist, (erweiterte erste Regel des algebraischen Differentiirens, Diff. R. VI. §. 17.) ebenfalls $d\,(X^{n+1} + C) = (n+1)\,X^n\,dX + 0$ ist: so folgt daraus, wie oben (§ 13.), dafs auch $\int X^n\,dX = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C$ seyn mufs; natürlich wiederum unter der Bedingung, dafs auch $\frac{X^{n+1}}{n+1}$ eine wahre algebraische Function

sey, welche $(n+1)\frac{X^n}{n+1}dX = X^n dX$ als algebraisches Differential geben konnte.

In dem einzigen Falle, dafs $n = -1$ gegeben wäre, würde sie als $X^{-1+1} = X^0 = 1$ keine wahre Function, sondern nur eine Scheinfunction des veränderlichen X seyn.

Wenn man sich dann $X^n = h^{nZ}$, also die algebraische Function mit veränderlicher Stammgröfse und unveränderlichem Exponenten, als eine exponentiale Function mit constanter Stammgröfse $h = 2{,}7182818\ldots$ und einem veränderlichen Exponenten nZ vorstellt, der also bei constantem n, den natürlichen Logarithmen der algebraischen Function ausmachen mufs: so ergibt sich nach den Schlüssen des §. 17., X und Z statt des dortigen x und z gebraucht, dafs $\frac{dX}{X} = d \log X$,

also $\int X^{-1} dX = \log X + C$ seyn mufs.

Zusatz.

§. 22. Daher auch dieser 2ten Regel hinzuzufügen ist, dafs man, durch die Meinung, ein vorgegebnes Differential algebraisch integriren zu können, auf ein $= \frac{X^0}{0}$ gebracht, statt dessen $\log X$ anzusetzen habe.

§. 23. *Beispiele für die zweite Regel*

$\int X^n dX = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C$, und ihre

Ausnahme $\int \frac{dX}{X} = \log X + C$

1) Schon $\int (x-b)^{\frac{1}{2}} dx$ würde der ersten Regel für $\int x^n dx$, nach obiger Einschränkung (§. 20.) ver-

standen, nicht mehr unterworfen seyn. Da man aber $x-b = X$ gedacht, $dx = dX$ hat: so sind wir durch die **zweite** Regel sogleich gewifs, dafs $\int(x-b)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}(x-b)^{\frac{3}{2}} + C$ seyn mufs.

2) $\int(ax-2xx)^n.(a-4x)dx = \frac{(ax-2xx)^{n+1}}{n+1} + C$;

denn $X = ax-2xx$, hat ja $dX = adx-4xdx$

3) $\int\frac{a-4x}{ax-2xx}dx$ ist ein $= \int\frac{dX}{X}$,

also $= \log(ax-2xx) + C$

4) $\int(a+3\sin\varphi^2)^3.6\sin\varphi\, d\sin\varphi$

$= \frac{1}{4}(a+3\sin\varphi^2)^4 + C$;

denn $X = a+3\sin\varphi^2$ gedacht, gibt $dX = 6\sin\varphi\, d\sin\varphi$, weil ja $\sin\varphi^2$, als eine veränderliche Gröfse in der constanten Dignität 2, eine algebraische Function, und als solche zu differenziiren ist; wobei es uns nichts angeht, ob etwa $d\sin\varphi$ noch anders, etwa als $\cos\varphi.d\varphi$, auszudrücken seyn möchte. Vielmehr würde man, wenn im vorgegebnen Differential schon $\cos\varphi\, d\varphi$ stände, statt dessen sich $d\sin\varphi$ schreiben müssen, um es der Form $X^n dX$ unterworfen zu sehen.

Dritte Hauptregel des algebraischen Integrirens.

§. 23. Auch ist $\int U^n dU = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C$, ebenfalls mit der Ausnahme $\int\frac{dU}{U} = \log U + C$; wenn U eine beliebige Function von zwei oder mehren veränderlichen Gröfsen ausmacht.

Man verfolge wiederum den Beweis der ersten Hauptregel für $\int x^n dx$, so erhellet, dafs er allenthal-

ben gültig bleibt, auch wenn man dem dortigen x die Bedeutung des hier aufgeführten U beigelegt hat.

§. 24. Unmittelbar ergibt sich diese dritte Regel aus dem Lehrsatze VI. in Diff. R. VI. §. 52; und zugleich, daſs diese 3te Regel eben so eine zweite Erweiterung der ersten Regel ausmacht, wie jener Lehrsatz VI. als eine zweite Erweiterung des dortigen Iten Lehrsatzes aufgeführt ist.

Wiederum gestehe ich gerne ein, daſs diese Erweiterung sogleich von der ersten Regel für $\int x^n dx$ mit umfaſst ist, wenn man sogleich sagt, daſs ihr x jede veränderliche Gröſse, also auch jede Function von noch so vielen veränderlichen Gröſsen bedeuten solle; indessen ist es gar zu rathsam, zwischen Urdifferentialen, und den dadurch bewirkten Functionsdifferentialen zu unterscheiden. Wenn es ferner von einigen der vorzüglichsten Lehrer, als sehr beachtungswerth bemerkt wird, daſs man ein zusammengesetztes Integrand auf *Monomen* (Eingliedrige) der Form $Ax^n dx$ zu bringen habe, so müssen sie doch entweder unter diesem x nur eine eingliedrige Stammgröſse verstehen, oder als schicklich behaupten wollen, daſs auch das X in unserer zweiten Regel, und das U in unserer dritten Regel, auch wenn es noch so vielgliedrig wäre, in Beziehung auf die Integrirungsregeln, eingliedrig zu nennen sey, sobald es ein vollständiges dX und dU zum Factor habe!

§. 25. Ein Beispiel für diese dritte Regel wäre

$$\int (xy)^n (x\,dy + y\,dx) = \frac{(xy)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Obgleich nun allerdings, wo man Differential- und Integral-Methode für angewandte Mathematik zu benutzen hat, und vermittelst mehrer noch von einander unabhängigen Variabeln anzulegen genöthigt ist, nur selten sich der glückliche Fall ereignen wird, daſs das aufgefundene Differential der Form $U^n dU$ vollständig unterworfen wäre, also für das Integrand $\int U^n dU$, sogleich $\frac{U^{n+1}}{n+1} + C$ uns eingeliefert würde: so ist es doch allemal rathsam, durch Vergleichung mit diesem $U^n dU$ es einzusehen, woran

es dem vorgegebnen Differentiale fehle, um vermittelst der dritten Regel sogleich, und zuvörderst als algebraisches Differential integrirbar zu seyn.

§. 26. Eben so werden wir jedes uns vorkommende Integrand mit einer einzigen Variablen, in ähnlicher Absicht zuvörderst mit der Form $\int X^n dX$ zu vergleichen haben, falls es nicht etwa ganz offenbar schon der Form des eingliedrigen $\int x^n dx$ und somit der ersten Regel unterworfen ist.

§. 27. Bei solcher Vergleichung, es sey mit $\int U^n dU$, oder $\int X^n dX$, hat man zuvörderst zu fragen, ob etwa die gewünschte Uebereinstimmung durch irgend einen constanten Totalfactor sich bewirken lasse; da denn die Hülfe nahe liegt.

Denn wenn man z. B. das vorgegebne Integrand $\int(a+bxx)^n x\,dx$ mit $\int X^n dX$ vergleichend, $X = a+bxx$ gesetzt, also $dX = 2bx\,dx$ gefunden hat: so braucht man nur zu bedenken, dafs

$(a+bxx)^n x\,dx$ auch $= \frac{1}{2b}(a+bxx)^n . 2bx\,dx$ seyn,

also $\int(a+bxx)^n x\,dx = \frac{1}{2b}\int(a+bxx)^n . 2bx\,dx$, also

nach zweiter Regel, $= \frac{1}{2b}\frac{(a+bxx)^{n+1}}{n+1} + C$ seyn mufs.

Eben so würde man, durch Hülfe des constanten Totalfactors -1 sogleich schliefsen,

dafs $\int(a-x^2)^n . 2x\,dx$ auch $= -1 . \int(a-x^2)^n . -2x\,dx$,

also auch, nach 2ter Regel, $= -\frac{(a-xx)^n}{n+1} + C$ seyn mufs.

§. 28. Diese ganze Hülfe gründet sich durchaus darauf, dafs jedes d. AU auch = AdU ist (Diff. R. VI. §. 13.),

folglich auch jedes $\int AdU = A\int dU$ seyn mufs: nämlich, jeder mit der Function nicht veränderlicher Totalfactor A, sowol dem Zeichen $\int$ der geforderten Integrirung, als dem Zeichen d der geforderten Differenziirung, nach Belieben untergeben, oder vorgesetzt werden kann.

§. 29. Für ein gegebnes

$\int(ax + bx^2 + bx^3)^n(1 + 2x + 3x^2)dx$ würde dagegen diese Hülfe nicht statt finden, indem sie vermittelst eines Totalfactors b nur eintreten könnte, wenn auch der Partialfactor a ebenfalls = b wäre. Indessen finden wir uns durch diese unsere Unterscheidung zwischen Total- und Partialfactor erinnert, zu bedenken, das die Hülfe sogleich statt finden würde, als man etwa a = b sich verschaffen, oder doch mit hinreichender Genauigkeit des Erfolges, unterschieben könnte.

§. 30. Wenn aber bei Vergleichung mit der Regelform $\int X^n dX$ sich ergibt, dafs das vorgegebne Integrand ein $\int X^n d\mathfrak{X}$ sey, dessen $d\mathfrak{X}$ erst mit Hülfe eines veränderlichen Factors $\mathfrak{x}$, ein $\mathfrak{x}d\mathfrak{X} = dX$ geben würde: so wird es ungleich schwieriger zu finden, ob und wie vielleicht eine genaue Integrirung vermittelst der Regelform noch abzureichen seyn möchte; falls nicht gerade n, die Dignität der Stammgröfse X, eine ganze bejahte Zahl ist. Denn da in diesem Falle die sämmtliche Potenz X^n durch eine Reihe von $(n+1)$ Gliedern sich völlig genau darstellen läfst: so kommt es nur noch darauf an, dafs man jedes dieser Glieder einzeln zu integriren wisse.

z. B. $\int(a x^{\frac{1}{2}} + b x^2)^3 . x^{\frac{1}{4}} dx = \int(a + b x^{\frac{3}{2}})^3 . x^{\frac{7}{4}} dx$

$$= \int(a^3 + 3 a^2 b x^{\frac{3}{2}} + 3 a b^2 x^3 + b^3 x^{\frac{9}{2}}) x^{\frac{7}{4}} dx$$

$$= \int a^3 x^{\frac{7}{4}} dx + \int 3 a^2 b x^{\frac{13}{4}} dx + \int 3 a b^2 x^{\frac{19}{4}} dx + \int b^3 x^{\frac{25}{4}} dx$$

$$= \tfrac{4}{11} a^3 x^{\frac{11}{4}} + \frac{4.3}{17} a^2 b x^{\frac{17}{4}} + \frac{4.3}{23} a b^2 x^{\frac{23}{4}} + \frac{4}{29} b^3 x^{\frac{29}{4}}$$

§. 31. Sey zum Beispiel, $n = 3$, die Stammgröſse X zweigliedrig, $= a x^\alpha + b x^\beta$, und $g x^\gamma$ als der äuſsere, freie Factor gegeben: so weiſs man zuvörderst, daſs $\int(a x^\alpha + b x^\beta)^3 . g x^\gamma dx$

$= g . \int(a^3 x^{3\alpha} + 3 . a^2 x^{2\alpha} . b x^\beta + 3 a x^\alpha . b^2 x^{2\beta} + b^3 x^{3\beta}) x^\gamma dx$, seyn muſs, weil g, als ein constanter Totalfactor, dem Integrirungs-$\int$ kann vorgesetzt werden (§. 28.), die dritte Dignität des Binomium aber nach dem binomischen Lehrsatze durch die viergliedrige Reihe der Parenthese ganz genau und vollständig entwickelt ist.

Dieses Integrand muſs nun auch =

$$g . \int(a^3 x^{3\alpha+\gamma} dx + 3 a^2 b x^{2\alpha+\beta+\gamma} dx + 3 a b^2 x^{\alpha+2\beta+\gamma} dx + b^3 x^{3\beta+\gamma} dx);$$

folglich nach Diff. R. VI. §. 25. auch =

$$g\left[\int a^3 x^{3\alpha+\gamma} dx + \int 3 a^2 b x^{2\alpha+\beta+\gamma} dx + \ldots\right] \text{ seyn.}$$

In jedem dieser vier Integranden dessen Totalfactor wiederum vorgesetzt, hat man nun das ganze Integrand =

$$g\left[a^3 \int x^{3\alpha+\gamma} dx + 3 a^2 b \int x^{2\alpha+\beta+\gamma} dx + 3 a b^2 \int x^{\alpha+2\beta+\gamma} dx + b^3 \int x^{3\beta+\gamma} dx\right]$$

folglich das ganze Integral =

$$g\left[a^3 . \frac{x^{3\alpha+\gamma+1}}{3\alpha+\gamma+1} + 3a^2 b . \frac{x^{2\alpha+\beta+\gamma+1}}{2\alpha+\beta+\gamma+1} + 3ab^2 . \frac{x^{\alpha+2\beta+\gamma+1}}{\alpha+2\beta+\gamma+1} + b^3 . \frac{x^{3\beta+\gamma+1}}{3\beta+\gamma+1}\right] + Const;$$

indem ja, die Exponenten α, β, γ möchten seyn, welche constante Gröſsen sie wollten, sowol $\int x^{3\beta+\gamma} dx$, als $\int x^{2\alpha+\beta+\gamma} dx$, u. s. w. sogleich der ersten Integrirungsregel $\int x^n . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ unterworfen ist; da dessen n die allgemeine Bedeutung in dem binomischen Lehrsatze für sich hat.

Sollte z. B. das einzelne Integrand $\int x^{3\beta+\gamma} dx = \int x^{-1} = \int \frac{dx}{x}$ sich ergeben, so würde nach §. 15. dieses $= \log x$ anzusetzen seyn.

Da diesem Integrale auch eine logarithmische Constante zukommt: so kann es schon aus diesem Grunde bisweilen nöthig seyn, für die allgemeine Constante zu bedenken, daſs sie eigentlich aus 4 Theilen bestehen muſs. Mehr darüber beim logarithmischen Integriren!

§. 32. Wenn in dem vorigen Beispiele statt des eingliedrigen äuſseren Factors $g x^\gamma dx$ ein zweigliedriger, sey er auch nur ein $(f + g x^\gamma) dx$, oder ein dreigliedriger $(f + g x^\gamma + k x^\kappa) dx$ gegeben wäre: so würde man die viergliedrige Reihe des gegebnen X^3, in jedes einzele Glied des äuſsern Factors zu multipliciren haben, und dadurch 8 oder 12 einzele Integranden erhalten.

§. 33. Wenn statt der zweigliedrigen Stammgröfse im vorigen Beispiele eine dreigliedrige gegeben wäre: so würde sie nach der trinomischen Reihe Diff. R. XXVII. §. 9. zu entwickeln seyn, und bei der Dignität 3 nicht nur, sondern auch wenn diese Dignität irgend eine andere ganze und bejahte Zahl ist, eine bestimmte Gliederzahl, und in dieser Hinsicht auch ein genaues Integral sich einliefern.

§. 34. Wenn nun aber die Dignität n, irgend eine andere, als eine ganze bejahte Zahl ist: so wird durch die Potenz-Entwickelung eine Reihe von unendlich vielen Gliedern gefordert; daher man auch unendlich viele einzele Integranden zu behandeln hätte. Wenn diese selbst eine stark convergirende, und summatorisch convergente Reihe ausmachen: so wird uns ihre Benutzung oftmals bequemer, als ein in Hinsicht seiner endlichen Gliederzahl genaues, vollständiges, aber vielleicht sehr mühsam zu berechnendes Integral seyn. Indessen ist es nur zu oft der Fall, dafs man dadurch auf Reihen kommt, welche gerade bei solchen Werthfällen ihres x, wofür man sie anwenden will, eine Divergenz beweisen, die nur schwierig, oder auch gar nicht zum Zwecke führen kann.

§. 35. Aus noch andern Gründen, welche hier noch nicht verständlich werden können, ist die Frage wichtig, ob nicht ein binomisches Potenz-Integrand $(ax^{\alpha} + bx^{\beta})^{p} . x^{\gamma} dx$, auch wenn die Dignität p keine ganze bejahte Zahl ist, dennoch bei einigen Werthen des α, β und γ, genau integrirbar, das heifst, durch eine endliche Anzahl von Gliedern abzureichen seyn möchte!

Indem wir uns bei dieser Untersuchung zuvörderst auf eine zweigliedrige Stammgröfse, und eine

einzige unveränderliche x einschränken müssen: so wird übrigens der obige Ausdruck allgemein genug gefaſst seyn: denn mit einem äuſseren constanten Totalfactor brauchen wir uns wegen §. 28. nicht, und mit einem mehrgliedrigen äuſsern Factor wegen §. 32. nicht zu belasten.

Vielmehr bemerken wir vorläufig, daſs der hingesetzte allgemeine Ausdruck allemal auch als $= (a + b x^{\beta-\alpha})^p x^{\gamma+p\alpha}$ dx ausgedrückt werden kann, also der Form $(a + b x^n)^p x^m$ dx unterworfen ist; daher wir im Vten Kapitel, wo wir diese Untersuchung vornehmen, von dieser Form ausgehen werden. Uebrigens werden wir dabei fernerhin, wie es so eben schon geschehen ist, die Dignität des Binomium durch p schreiben, um den Buchstaben n, für das Glied $b x^n$ zu gebrauchen, und in diesen Bezeichnungen mit andern in Teutschland vorzüglich bekannten Lehrbüchern übereinstimmend zu bleiben.

Zweites Capitel.

Anwendung der obigen Integrirungsregeln auf's Quadriren ebner Flächen, Kubiren einiger Axen-Körper, Rectificiren einiger Curven und Quadriren gekrümmter Oberflächen.

§. 1. In einer einfach gekrümmten Linie DF (Fig. 1.) sey jeder ihrer Puncte M, als Entfernung PM von der geraden Linie BE, vermittelst einer Gleichung zwischen den geradlinigen Abscissen AP $=$ x, und ihren normalen Ordinaten PM $=$ y möglich bewerthet: so wird durch die sämmtlichen BP und PM, als sämmtlich einander normale Dimensionen, längs der geradelinigen BE, und der krummlinigen DMF, eine Flächengröſse BDMFE bestimmt, welche die BD zur normalen Anfangsgränze, die EF zur normalen Endgränze hat.

Wenn wir uns ihre Länge, ihre Grundlinie BE, von dem Endpuncte B der x $=$ AB anfangend, bis zum Endpuncte der x $=$ AE hin, nach und nach anwachsend vorstellen: so wird auch die Flächenfigur, von ihrer Anfangsgränze BD an, nach und nach anwachsend, eine mit den wachsenden x $=$ AP, nach und nach fortrückende Endgränze y $=$ PM haben, und die mit x veränderliche Fläche BDMP eine Function von x ausmachen, die wir X nennen wollen.

§. 2. So lange wir uns die AP $=$ x mit einem endlichen $\triangle$x $=$ PP′ belegt fordern können, auch längs diesem $\triangle$x, vermöge der zwischen x und y gegebnen Gleichung, noch mögliche y $+$ $\triangle$y sich ergeben müssen; so lange würde

dann auch durch eine endliche Urbelegung Δx der Abscissen x, für die Fläche X, während ihres ganzen Anwachsens, die endliche ΔX allerdings bewirkt seyn.

Gesetzt aber, daſs die Abscissen $x = AP$, mit $x = AE$ ihren letzten möglichen Endpunct erreicht hätten, oder doch mit der EF die letzte mögliche Ordinate y erreicht wäre: so würden ja die endlichen Belegungen ΔX nicht für die ganze Fläche BF möglich bleiben!

§. 3. Wenn wir dagegen nur eine unendlich kleine Urbelegung dx fordern, so wird auch die dadurch bewirkte Functionsbelegung dX nur unendlich klein seyn, und daher die erwähnte Unmöglichkeit erst eintreten können, wenn man der beabsichtigten letzten Gränze EF schon unendlich nahe gekommen ist.

Wenn wir dann ferner fordern, daſs die Urbelegung dx, folglich (Diff. R. II. §. 13.) auch die dadurch bewirkte Functionsbelegung dX, wirklich = o werdend und geworden seyn soll: so muſs damit auch die letzte Gränze EF auf das völligste abgereicht werden.

Für dieses genaue Differential dX werden wir nun erweisen, daſs es ganz genau $= y\,dx = y.o$ seyn muſs; immerfort, bis zu dem allgemeinen Lehrsatze §. 29. hin, ausbedungen, daſs bis dahin lauter orthogonale Coordinaten x und y gebraucht werden.

Particller Lehrsatz.

§. 4. Bei rechtwinkligen Coordinaten x und y ist ydx das genaue Differential der

Flächengröfse X, indem auch $\frac{dX}{dx} = y$ ihr genauer Diferentialquotient ist.

Beweis. Fig. 2 und 3.

§. 5. In Figur 2. und 3. ist $PP' = 'dx$, und $NM' = 'dy$. Es mag nun $NM' = 'dy$ bejaht gerichtet seyn, wie in Fig. 2., oder verneint gerichtet seyn, wie in Fig. 3.; in beiden Fällen mufs des Viereckes $'dX = PMM'P'$ Flächengröfse zwischen den Rechtecken $PN = y'dx$ und $PM' = (y + 'dy)'dx$ fallend, also auch der werdende Differentialquotient $\frac{'dX}{'dx}$ immerfort zwischen $= y$ und $= y + 'dy$ fallend seyn, bis mit $'dx = dx = o$, auch $'dy = dy = o$ geworden, also ganz genau $\frac{dX}{dx} = y$, und somit auch das genaue Differential $dX = y\,dx = y \cdot o$ geworden ist.

§. 6. Demnach ist auch $'dX = y'dx$ derjenige Theil des werdenden Differentiales $'dX$, welcher hinreichend ist, um aus seiner Form auf die Form der Function zu schliefsen, aus welcher der Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = y$ entstehen kann, vorausgesetzt, dafs $y\,dx$ eine in dieser Hinsicht uns bekannte Form darstellt. Um dieses vermittelst der bisher uns bekannt gewordenen Formen zu beurtheilen, müssen wir vermittelst der zwischen x und y gegebnen Gleichung auch y als Function von x ausdrücken.

Aufgabe.

§. 7. Die Parabel zu quadriren.

Auflösung.

§. 8. Sey diese Curve (Fig. 4.) durch einen bejahten Parameter b, und orthogonale Coordinaten x und y, die Abscissen x im Scheitelpuncte A anfangend, also durch die Gleichung $yy = bx$ gegeben: so hat man jedes bejahte $y = \sqrt{bx} = b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, und das Flächen-Differential, ydx, allen mit x und y veränderlichen ebnen Flächen angehörig, deren Grund-Dimensionen, wie wir sie nennen wollen, den x parallel sind, und deren Höhen-Dimensionen den y gleich sind, in diesen y selbst bestehen. Jede dieser Flächen, welche wir als eine Function des x zu finden wünschen, durch X benannt haben wir

$dX = ydx = b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$, also (nach der Regel I §. 12.) auch $\int dX = \int ydx = \frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.x = \frac{2}{3}y.x$;

folglich $X = \frac{2}{3}yx + C$. Denn da wir aus dem durch die veränderlichen Endgränzen $\frac{dX}{dx} = y$ bestimmten Differentiale $dX = ydx = b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$, nach der, für diese Differentialform gehörigen Integrirungsregel geschlossen haben, daſs $\int dX = \frac{2}{3}yx$ seyn müsse: so kann hiemit nur der mit x veränderliche Theil in dem formularen Ausdrucke des X gefunden seyn, und muſs dagegen dessen constanter Theil C, wegen der noch nicht bestimmten Anfangsgränze des X, noch unbestimmt beblieben seyn.

§. 9. Verlangen wir durch X das ganze parabolische Dreieck AMP gefunden zu haben: so muſs die Fläche X zugleich mit $x = 0$ anfangend seyn, also für $x = 0$ auch X eine andere Flächen-

gröſse als $= O$, noch nicht ausmachen können; daher wir aus der obigen
allgemeinen Gleichung $X = \frac{2}{3}\, y . x + C$
auf ihren einzelen Fall $O = \frac{2}{3}\, y . o + C$ schlieſsen müssen; aus welchem nun folgt,
daſs $C = - \frac{2}{3}\, y . o = O$ seyn muſs, und demnach die Gröſse des parabolischen Dreieckes AMP ein $X = \frac{2}{3}\, yx + O$ seyn muſs *).

§. 10. (Nach Fig. 4. also dieses parabolische Dreieck $= \frac{2}{3}$ des Rechteckes PN, die absolute Gröſse des parabolischen Abschnittes MA𝔐 also $= \frac{2}{3}$ des Rechteckes 𝔐N: auch das concave Dreieck AMN $= \frac{1}{3}$ des Rechteckes PN, also genau die Hälfte des parabolischen Dreiecks AMP.)

§. 11. Würde dagegen verlangt, durch dieses X, nicht das parabolische Dreieck AMP, sondern das parabolische Trapez EPMF bestimmt zu wissen: so wäre hiemit zur Anfangsgränze die Ordinate EF bestimmt, welche einer gewissen Abscisse $x = e = AE$ zugehörig, ein $y = \sqrt{}\, be.$ seyn muſs.

Demnach ist nun aus der allgemeinen Bestimmung $X = \frac{2}{3}\, yx + C$
auf $O = \frac{2}{3}\, e \sqrt{}\, be. + C$, also $C = - \frac{2}{3}\, e \sqrt{}\, be.$
also $X = \frac{2}{3}\, yx - \frac{2}{3} \sqrt{}\, be . e$ zu schlieſsen.

Einleuchtend richtig ist hiermit gefunden, daſs das parabolische Trapez EM die Differenz zwischen dem parabolischen veränderlichen Dreiecke $AMP = \frac{2}{3}\, yx$, und dem constanten parabolischen Dreiecke $AEF = \frac{2}{3} \sqrt{}\, be . e$ ausmachen muſs. [Auch

*) Zum Bestrn der Anfänger will ich eine vernullte Flächengröſse durch eine gröſsere O, und eine vernullte Linie durch eine kleinere o bisweilen schreiben; und der Bequemlichkeit wegen $\sqrt{}\, bx.$ statt $\sqrt{bx}$.

ist es sehr richtig, dafs dieses X = EFRQ, sich negativ ergibt für alle x, die kleiner als e sind. Denn sey z. B. x = AB, so ist das Trapez ED eben defshalb verneint geflächt, weil es in EF seinen constanten Anfang hat, seine veränderliche Endgränze BD, bei lauter bejahten Ordinaten BD mit verneinter Abscissenrichtung EB erreicht.]

» (Der Ausdruck bejaht, verneint geflächt ist für die algebraische Planimetrie motivirt in meiner Algebraischen Auflösung arithmetischer und geographischer Auflösung. Freyberg 1808.

§. 12. Gesetzt, wir verlangen den Anfang der parabolischen Fläche X, der constanten Abscisse x = AF = — f gemäfs gefordert: so müfste nach der allgemeinen

Gleichung $X = \frac{2}{3} yx + C$,
sich $O = \frac{2}{3} \dot{g}(-f) + C$, also $C = -\frac{2}{3}(-f)$,
und demnach $X = \frac{2}{3} yx + \frac{2}{3}\dot{y}(-f)$ sich ergeben.

Da nun aber $\dot{y}$, als die der constanten Abscisse $x = - f$ zugehörige Ordinate $\dot{y} = \sqrt{-bf}$ als eine algebraisch unmögliche Gröfse, auch für die algebraische Geometrie darstellig gar nicht ist: so mufs auch diese Fläche X längs dem verneinten Abscissenantheile FA unmöglich bleiben, also geometrisch darstellig gar nicht vorhanden seyn.

Um der algebraischen Geometrie gemäfs hiebei vollkommen richtig sich auszusprechen, mufs man sagen, dafs diese parabolische Fläche X, welche schon in dem Endpuncte F einer verneinten Abscisse AF = — f gemäfs ihren Höhen-Anfang nehmen soll, bis zum Scheitel A hin, einen unmöglichen Theil hat, ihr möglicher Theil erst dem Scheitel A gemäfs seinen Anfang nimmt. Ich sage, um allgemein richtig mich auszudrücken, dafs dieser Anfang dem

Scheitel gemäfs, nämlich in einer durch den Scheitelpunct gelegten Höhenlinie vorkommend seyn müsse; denn dafs er gerade im Scheitelpuncte selbst, mit einer Höhe $y = o$ seinen Anfang nimmt, ist nur zufällig. Gar häufig wird bei andern Curvengleichungen, der erste mögliche Anfang ihrer quadrirten Flächen $\int y\,dx$ sogleich eine Höhenlinie y, und nicht selten sogar eine unendlich grosse Höhenlinie y seyn.

Zusasz zur Auflösung.

§. 13. Soll die Parabel vermittelst der Gleichung $yy = b(e + \mathfrak{x})$ quadrirt werden (welche den Abscissen-Anfang um $+ e = AE$ von dem Scheitel entfernt, in E genommen fordert): so hat man das Flächen-Differential

$$y\,d\mathfrak{x} = b^{\frac{1}{2}}(e + \mathfrak{x})^{\frac{1}{2}}\,d\mathfrak{x};\ \text{nach Regel 2, I. §. 21,}$$

$$\text{also, } \int y\,dx = \tfrac{2}{3}\,b^{\frac{1}{2}}(e + \mathfrak{x})^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\,y(e + \mathfrak{x})$$

$$\text{und } \mathfrak{X} = \tfrac{2}{3}\,y(e + \mathfrak{x}) + C,$$

durch $\mathfrak{X}$ hier die mit $\mathfrak{x}$ veränderliche Fläche bedeutet, für deren formularen Ausdruck wir den mit x veränderlichen Theil desselben, durch die angeführte Integrirungsregel bereits gefunden haben, und dessen constanter Theil uns, mit der constanten Anfangsgränze, noch zu bestimmen überlassen bleibt.

Wollen wir durch dieses $\mathfrak{X}$ das ganze parabolische Dreieck AMP angegeben wissen, so bedenken wir, dafs $\mathfrak{X} = o$ geworden seyn müfste mit $\mathfrak{x} = - e$, folglich $O = \frac{2}{3}y(e - e) + C$, also $C = - \frac{2}{3}y \cdot o = O$, und daher $\mathfrak{X} = \frac{2}{3}y(e + \mathfrak{x}) + O$ seyn mufs; mit dem in §. 10. gefundenen $X = \frac{2}{3}\,yx$ ganz übereinstimmend; da ja $e + \mathfrak{x} = AE + EP = x$ ist.

Soll aber durch $\mathfrak{X}$ das Trapez EFPM gefunden werden: so mufs, da dieses mit $\mathfrak{x} = o$ seinen An-

fang nimmt, $O = \frac{2}{3}\dot{y}(e+o) + C$, also $C = -\frac{2}{3}\dot{y}e$ seyn; $\dot{y}$ die zum $x = o$ gehörige Ordinate $EF = \sqrt{be}$., nach obiger Parabelgleichung, bedeutend.

Zweiter Zusatz zur Auflösung.

§. 14. Die Parabel-Gleichung $yy = b(-f+x)$ setzt einen Anfang der Abscissen $x = FP$ voraus, der um $AF = -f$ vom Scheitel A entfernt ist. Sie gibt das Flächendifferential

$$y\,dx = b^{\frac{1}{2}}(-f+x)^{\frac{1}{2}}\,dx,$$

also $\int y\,dx = \frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}(-f+x)^{\frac{1}{2}}.(-f+x) = \frac{2}{3}y(-f+x)$
und $\mathfrak{X} = \frac{2}{3}y(-f+x) + C$.

Verlangt man hier durch $\mathfrak{X}$ die Fläche gefunden, welche sogleich dem $x = o$ gemäfs ihren Anfang nehmen, also mit $x = o$ eine Flächengröfse $\mathfrak{X} = O$ habe: so hat man

$$O = \frac{2}{3}\dot{y}(-f) + C, \text{ also } C = -\frac{2}{3}\dot{y}(-f),$$

und $\mathfrak{X} = \frac{2}{3}y(-f+x) - \frac{2}{3}\dot{y}(-f)$

$\dot{y}$ die der constanten Abscisse $x = -f$ zugehörige unmögliche Ordinate $= \sqrt{b(-f)}. = \sqrt{-bf}$. bedeutend; also $\mathfrak{X}$ mit einem unmöglichen Flächentheile anfangend; wie in §. 12.

§. 15. Anfänger werden wohl thun, durch obige Darstellungen sich einige anschauliche Ansichten über die Verbindung zwischen dem constanten Theile C in dem Integral-Ausdrucke der Flächengröfse X, und deren constanter Anfangsgränze, geläufig zu machen; welche uns, gehörig modificirt, bei den schwierigen Bestimmungen der Constanten in verwickelten Integralausdrücken immerhin zu einer deutlichen Grundlage verhelfen werden. Allemal wird es darauf hinauskommen, dafs entweder für geforderte Anfangsgränzen der gesuchten Integralgröfse die gehörigen constanten Gröfsen zu bestimmen, oder für gegebne constante Gröfsen, die Anfangsgränzen für die veränderlichen Theile des Integralausdruckes zu finden sind; und

wir in beider Hinsicht die Gränzen des Möglichen und Unmöglichen zu unterscheiden suchen.

§. 16. Statt der krummen Linie AD im parabolischen Dreiecke ABD, Fig. 4, könnte man auch in den geradelinigen Dreiecken ABD. Fig. 5 und 6, die geraden Linien AMD durch orthogonale Coordinaten x und y bestimmt fordern, um die obige Quadrirung durch Differential- und Integralmethode auf solche geradelinige Dreiecke anzuwenden.

§. 17. Bei dem rechtwinkligen, Fig. 5, seyen dessen Katheten $AB = a$ und $BD = b$ gegeben, und werde $AP = x$, und $PM = y$ gesetzt: so hat man $x : y = a : b$, also $y = \frac{b}{a} x$, und das mit seiner Höhengränze $PM = y$ veränderliche Dreieck $APM = X$ genannt,

$$dX = y\,dx = \frac{b}{a} x\,dx,$$

folglich $\int dX = \int \frac{b}{a} x\,dx = \frac{1}{2} \frac{b}{a} x.x = \frac{1}{2} yx;$

also $X = \frac{1}{2} yx + C.$

Da nun so eben schon gesagt ist, daſs X das mit $x = o$ anfangende Dreieck APM seyn soll, welches also mit $x = o$, selbst auch, als Flächengröſse noch $= O$ seyn muſs; so hat man

$O = \frac{1}{2} \dot{y} . o + C$, also $C = \frac{1}{2} \dot{y} . o = O$; und demnach vollständig $X = \frac{1}{2} yx$; auch für $x = a$ und $y = b$, das ganze Dreieck $ABD = \frac{1}{2} ab.$

(Die $\dot{y}$, als die dem $x = o$ zugehörige Ordinate, war hier wiederum $= o$, also die Flächengröſse des X in dessen Anfange wiederum $= o . o$. In folgen-

der Behandlung wird es anders seyn, und diese zugleich ein Beispiel abgeben, wie sicher wir in Hinsicht der algebraisch bejahten und verneinten Verflächung zu verfahren wissen.)

§. 18. Der Gebrauch des Dreieckes (Fig. IV. 5*) bringe es so mit sich, selbiges in BD anfangend, und nach der verneinten Richtung der BA sich erstreckend zu denken: so wird es bei seinen fernerhin bejahten Ordinaten als eine algebraisch verneinte Fläche sich ergeben müssen.

Soll nun $BP = -x$, also diese unveränderliche Gröſse verneint seyn, so muſs sie nach Diff. R.III. §. 30 mit einem verneinten $P'P = -dx$ belegt werden. Das mit $BP = -x$ veränderliche Trapez $BM = X$ genannt, wird, in BD mit $-x = -o$ anfangend, und längs $-x$ sich erstreckend, selbst auch als eine verneinte Fläche sich ergeben müssen; auch wenn, wie vorhin, die $AB = +a$, und $BD = +b$ gegeben sind.

Denn da $AB : AP = BD : PM$

das ist $+a : +a-x = +b : y$

also $y = \frac{b}{a}(a-x)$ ist; so haben wir

$$dX = -y\,dx = \frac{b}{a}(a-x).(-dx), \text{ also (I, §. 21)}$$

$$\int dX = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}(a-x)^2 = \frac{1}{2}y.(a-x)$$

folglich $X = \frac{1}{2}y(a-x) + C.$

Da es nun schon gesagt ist, daſs das Trapez X mit $-x = -o$ seinen Anfang nehmen soll: so ist für $x = o$ dessen Flächen-Gröſse

$$X = \dot{y}\cdot(-o) = b\cdot(-o) = -O,$$

also $O = \frac{1}{2}\,b.a + C$, also $C = -\frac{1}{2}\,ba$,

also $X = \frac{1}{2}\,y\,(\dot{a} - x) - \frac{1}{2}\,ba.$

Da auch mit $-x = -a$ das Trapez BM zum Dreieck BAD geworden seyn muſs: so hat man hiemit $BDA = -\frac{1}{2}\,ba$ gefunden.

§. 19. Auch schiefwinklige Dreiecke ABD Fig. 6 können auf mancherlei Weise so behandelt werden, daſs ihre Quadratur vermittelst des speciellen Lehrsatzes §. 4 gefunden wird; z. B. wenn man die gegebne $BD = b$ bis R verlängert, um darauf rechtwinklig die AR zu ziehen, und vermittelst der rechtwinkligen Coordinaten $AQ = x$ und $QP = y$, das bei Q rechtwinklige Dreieck AQP, desgleichen vermittelst der rechtwinkligen Coordinaten $AQ = x$, und $QM = z$, das bei Q rechtwinklige Dreieck AQM quadrirt zu erhalten, von welchem denn das ebenfalls quadrirte rechtwinklige Dreieck AQP abgezogen, das gesuchte APM übrig lassen wird. Aber weit netter und lehrreicher wird es seyn, die schiefwinkligen Dreiecke durch den allgemeinen Lehrsatz §. 21, nach §. 31. zu quadriren.

Aufgabe.

§. 20. Den Kreis zu quadriren. (Fig. 7.)

Auflösung.

§. 21. Der Halbmesser sey $AM = a$, die Abscisse $AP = x$ und ihre rechtwinklige Ordinate $PM = y$: so ist $yy = aa - xx$, und das Viereck BP eine Function des x, welche X heiſsen mag.

Demnach $dX = y\,dx = (aa - xx)^{\frac{1}{2}}\,dx$

und $X = \int (aa - xx)^{\frac{1}{2}}\,dx + C.$

Dieses Integrand ist der Form $\int X^n dX$ (I. §. 21.) nicht unterworfen. Denn wenn man $X = aa - xx$ setzen wollte, so müſste der äuſsere Factor $dX = 2x\,dx$ seyn. Da wir statt dessen nur $1.dx$ haben, so fehlt es uns nicht etwa bloſs an dem constanten Factor 2, den wir nach I. §. 27 u. 28. leicht herbei schaffen könnten: sondern es fehlt auch an dem veränderlichen Factor x. Und obgleich es einige Integranden $\int(a + bx^n)^p x^m dx$ gibt, welche dessen ungeachtet, und ungeachtet eines gebrochenen p, immer noch durch eine endliche Anzahl von Gliedern können gewonnen werden; so wird doch das obige Kreis-Integrand für diese, und auch jede andere späterhin vorkommende Hülfe nicht geeignet seyn; und so pflegt man damit zufrieden zu bleiben, dasselbe durch eine zwar unendliche, aber doch convergirende Reihe auf folgende Weise annähernd so genau, als es irgend verlangt werden mag, finden zu können. Die binomische Reihe

$$(A+B)^n = A^n + n.A^{n-1}B + \frac{n.n-1.}{1.2}A^{n-2}B^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}A^{n-3}B^3 + \ldots$$

zuvörderst auf $n = \frac{1}{2}$ eingeschränkt, gibt

$$(A+B)^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{B}{A^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{B^2}{A^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{B^3}{A^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.\frac{B^4}{A^{\frac{7}{2}}} + \ldots$$

$$(aa-xx)^{\frac{1}{2}} = a - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a} - \frac{1.1.}{2.4}\frac{x^4}{a^3} - \frac{1.1.3.}{2.4.6}\frac{x^6}{a^5} - \frac{1.1.3.5.}{2.4.6.8}\frac{x^8}{a^7} - \ldots$$

$$\int(aa-xx)^{\frac{1}{2}}dx = \int(a\,dx - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a}dx - \frac{1.1.}{2.4}\frac{x^4}{a^3}dx - \frac{1.1.3.}{2.4.6}\frac{x^6}{a^5}dx - \ldots)$$

$$X = ax - \frac{1.1.}{2.3}\frac{x^3}{a} - \frac{1.1.1.}{2.4.5}\frac{x^5}{a^3} - \frac{1.1.3.1.}{2.4.6.7}\frac{x^7}{a^5} - \frac{1.1.3.5.1.}{2.4.6.8.9}\frac{x^9}{a^7} - \ldots + C$$

Allerdings eine Reihe ohn Ende, welche nie einen ganz bestimmten Werth haben kann. Aber da man sie auch als

$$X = ax\left(1 - \frac{1.1.x^2}{2.3.a^2} - \frac{1.1.1.x^4}{2.4.5.a^4} - \frac{1.1.3.1.x^6}{2.4.6.7.a^6} - \frac{1.1.3.5\,1.x^8}{2.4.6.8.9.a^8} - \ldots\right) + C$$

schreiben kann: so erhellet, dafs sie selbst für $x = a$ gesetzt, wodurch man den ganzen Quadranten ABD $= X$ erhält, noch ziemlich stark summatorisch convergent ist.

Hierbei den Halbmesser $a = 1$ gesetzt, gibt den Quadranten

$$= 1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4\,5} - \frac{3}{2.4.6.7} - \frac{3.5}{2.4.6.8.9} - \frac{3.5.7}{2.4.6.8.10.11} - \ldots$$

Berechnet man diese Reihe, so findet man sie $= 0{,}7853\ldots$, und daher die ganze Kreisfläche $= 4.0{,}7853\ldots = 3{,}141\ldots \times 1.1$, für den Halbmesser .1.

Beizubringen, wie man durch stärkere Convergenz und andere Mittel die Berechnung der Kreisfläche sich erleichtern kann, ist der Absicht dieses Lehrbuches nicht gemäfs. Bei der Rectificirung des Kreisumfanges wird es nöthiger und leichter seyn, sich eine stärkere Convergenz zu verschaffen.

Lehrsatz.

§. 22. Die Ellipse ist $= \frac{c}{a}$ 𝔎, wenn 𝔎 die Fläche eines Kreises bedeutet, dessen Halbmesser der halben grofsen Ellipsen-Axe a gleich ist, indem c die halbe kleine Axe angibt.

Beweis.

§. 23. Für die Ellipse ist die Gleichung aus dem Mittelpuncte $yy = cc - \frac{c^2}{a^2}x^2$,

also $y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

In Fig. 8. sey $AP = x$ und $A\mathfrak{M} = \mathfrak{X}$, so ist $P\mathfrak{M}' = d\mathfrak{X} = y\,dx = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.dx$, also das Ellipsenstück $\mathfrak{X} = \frac{c}{a}\int\sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx$.

Da nun für einerlei $AP = x$, in dem mit $AF = a$ beschriebenen Kreise, sein Flächenstück $AM = X$ genannt, $X = \int\sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx$ ist (§. 21.): so hat man ganz allgemein $\mathfrak{X} = \frac{c}{a}X$.

Für $x = a$ wird $\mathfrak{X}$ der Ellipse, und X des Kreises Quadrant. Heifsen sie $\mathfrak{Q}$ und Q, so hat man auch $\mathfrak{Q} = \frac{c}{a}Q$, und daher auch $4\mathfrak{Q} = \frac{c}{a}.4Q$. W. Z. E.

Zusatz 1.

Heifse $\mathfrak{k}$ die mit der **kleinen** Halbaxe beschriebene Kreisfläche $= \pi.cc$: so ist auch die Ellipse $E = \frac{a}{c}\mathfrak{k}$. Denn es ist $\mathfrak{K} = \frac{a^2}{c^2}\mathfrak{k}$, also nach dem Lehrsatze, auch die Ellipse $= \frac{c}{a}.\frac{a^2}{c^2}\mathfrak{k} = \frac{a}{c}\mathfrak{k}$.

Zusatz 2.

§. 25. Da $\mathfrak{k} = \pi cc$ ist, so hat man auch $E = \pi.ac$, das heifst, jede Ellipse ist πmal das Rechteck AK (Fig. 8.), dessen beide Seiten die Hälften von der grofsen und kleinen Axe der Ellipse sind.

Zusatz 3. Fig. 9.

§. 26. Ein Ellipsen-Abschnitt $\mathfrak{M}F\mathfrak{N}$, dessen Sehne $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ normal der grofsen Axe ist, kann durch folgende Schlüsse gefunden werden.

Es ist $\mathfrak{M} F \mathfrak{N} = 2 . \mathfrak{M} F P = 2 (ASF - A\mathfrak{M})$
$= 2 . \left(\frac{c}{a} . ATF - \frac{c}{a} . AM\right)$ (Beweis des Lehrsatzes)

also $\mathfrak{M} F \mathfrak{N} = \frac{c}{a} (TFU - TN) = \frac{c}{a}$ MFN.

Demnach auch dieser Ellipsen-Abschnitt gerade $\frac{c}{a}$ des Kreisabschnittes MFN; den man am bequemsten vermittelst der trigonometrischen Tafeln berechnen wird.

Zusatz 4. Fig. 10.

§. 27. Ein Ellipsen-Abschnitt $\mathfrak{L} S \mathfrak{M}$, dessen Sehne normal der kleinen Axe ist, wird auf folgende Weise gefunden.

Es ist $\mathfrak{L} S \mathfrak{M} = 2 . SP\mathfrak{M} = 2 (AFS - A\mathfrak{M})$. Nun läſst sich aber durch ein dem Beweise in §. 23. völlig ähnliches Verfahren zeigen, daſs das Ellipsenstück $A\mathfrak{M} = \frac{a}{c} \int (c^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy$ ist, wenn fernerhin $AP = y$ heiſst; und für das Kreisstück AM, dessen Halbmesser $= c$ ist, erhellet sogleich aus dem Beweise §. 23, daſs $AM = \int (c^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy$ ist. Also auch $A\mathfrak{M} = \frac{a}{c}$ AM.

Nach §. 24. aber ist der Ellipsen-Quadrant $AFS = \frac{a}{c} . ASG$; also

$\mathfrak{L} SM = 2 . \frac{a}{c} (ASG - AM) = \frac{a}{c} . 2 . SPM = \frac{a}{c} . LSM$; also der Ellipsen-Abschnitt $\mathfrak{L} S \mathfrak{M}$ gerade $\frac{a}{c}$ des Kreis-Abschnittes LSM; der nun wiederum am leichtesten vermittelst der trigonometrischen Tafeln berechnet wird.

Einleitung zum allgemeinen Lehrsatze.
Figur 11.

§. 28. Wenn die Linie DMF durch schiefwinklige Coordinaten AP $=$ x und PM $=$ v mit constantem Neigungswinkel α, gegeben ist, und die zwischen der constanten Ordinate BD und der veränderlichen PM $=$ v, längs der BP sich erstreckende Ebne DP wiederum X genannt wird: so ist 'dX $=$ PMM'P'. Da nun dieses in MM' krummlinige Trapez, auch bei immerfort kleiner werdenden 'dx und 'dv, immerfort zwischen den beiden schiefwinkligen Parallelogrammen PN und PM' fallend ist, folglich

die Flächengröſse des 'dX $>$ v . sin α . 'dx
und $<$ (v $+$ 'dv) sin α . 'dx, immerfort seyn muſs, bis 'dx $=$ dx $=$ o, also auch 'dv $=$ dv $=$ o, und daher v $+$ 'dv $=$ v geworden ist: so muſs dann auch dX $=$ v sin α . dx $=$ v sin a . o nämlich dX als Flächengröſse $=$ O geworden seyn. Daher nun der folgende

Allgemeine Lehrsatz.

§. 29. **Bei fernerhin geradelinigen Coordinaten x und v, mit constantem Neigungswinkel α, ist v sin α . dx das genaue Differential der Flächengröſse X, indem $\frac{dX}{dx} =$ v sin α ein genauer dimensorischer Differentialquotient ist.**

Beweis.

§. 30. Der calculatorische Beweis für dX $=$ v sin α . dx ist schon in §. 28. enthalten. Und da nun die v sin α angibt, wie viel von einer der x normalen Richtung in der schiefgerichteten PM $=$ v steckt: so gibt sie

eine dimensorische Endgränze an; wie wir späterhin genauer erörtern, und dann auch darthun werden, nach welchen Vorstellungen auch $\sin\alpha . dx = \frac{dX}{v}$ die dimensorische Endgränze ausmachen würde.

Anwendung.

§. 31. In einem nicht rechtwinkligen Dreieck ABD (Fig. 6.) sey die Seite $AB = a$ und $BD = b$, samt ihrem Neigungswinkel α gegeben, und für die Abscisse $AP = x$ die ihr zugehörige Ordinate $PM = v$, der BD parallel: so hat man $AB : BD = AP : PM$, das ist $a : b = x : v$, also $v = \frac{b}{a} x$. Die Flächengröſse $APM = X$ genannt, also, $dX = v \sin\alpha . dx$ $= \frac{b}{a} \sin\alpha . x\,dx$, folglich $\int dX = \frac{b}{a} \sin\alpha . \int x\,dx$ $= \frac{b}{a} \sin\alpha . \frac{xx}{2} = \frac{v \sin\alpha . x}{2}$.

Da die Fläche $X = APM$, mit $x = 0$ ihren Anfang nimmt: so ist die Constante $= 0$, und daher auch für $x = a$, also $v = b$, das ganze gegebne Dreieck $ABD = \frac{a . b \sin\alpha}{2} = \frac{AB . ED}{2}$.

§. 32. **Anmerkung.** Auch krummlinig begränzte Ebnen $X = PM$ (Fig. 11.) können durch parallele, den Abscissen schiefwinklige Ordinaten bestimmt, und durch den allgemeinen Lehrsatz §. 29 integrirt werden. Da ich aber während meiner sämmtlichen praktischen Anwendung der Integral-Methode allemal für besser gehalten habe, dafür nur der rechtwinkligen Coordinaten mich zu bedienen; namentlich auch deſshalb, weil man es dabei mit reinen Dimensionen zu thun hat: so will ich jener, uns unnöthigen Künstelei keinen Raum gönnen. Nöthiger sind die gedreheten Ordinaten, die *radii vectores*, zur Bestimmung einiger Curven. Sollte ich wider Vermuthen auch ihre Flächenräume zu

integriren für die hier beabsichtigte Praxis jemals nöthig haben, so werde ich diese Integrirung dann auch begründen.

Kubiren. Fig. 2.

§. 33. Sey wiederum die Curve DM durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ gegeben; und die Ordinate BD, einer Abscisse AB zugehörig, sey die Anfangsgränze einer bei B und P rechtwinkligen Ebne BDMP, deren veränderliche Endgränze die $PM = y$ ist. Denkt man sich diese Ebne, um BF als Axe gedreht, daſs BD und PM zwei einander parallele Kreise beschrieben haben: so wird von der genannten Ebne selbst ein körperlicher Raum durchstrichen seyn, der längs BP sich erstreckend, nicht nur in dieser Hinsicht mit x veränderlich seyn, sondern auch, weil dessen y als Function des x gegeben ist, eine Function des x seyn muſs. Sie werde X genannt, so muſs ihr Differential $'dX = MM'\mathfrak{M}'\mathfrak{M} > \pi y^2\, 'dx$

und $< \pi(y + 'dy)^2\, 'dx$ immerfort bleiben, bis mit $'dx = dx = o$, folglich auch $'dy = dy = o$ geworden, $dX = \pi y^2\, dx$ geworden ist.

Aus diesem Differential des Axenkörpers X folgt nun $\int dX = \pi \int y^2\, dx$ und $X = \pi \int y^2\, dx + C$.

Aufgabe.

§. 34. Die Kugel zu kubiren.

Auflösung. (Fig. 7.)

§. 35. Der Kreisbogen BM sey durch die Gleichung $yy = aa - xx$ bestimmt, also a den Halbmesser, x und y die Coordinaten AP und PM bedeutend. Der Axenkörper $\mathfrak{B}BM\mathfrak{M}$ längs $AP = x$ sich

erstreckend, werde X genannt: so ist hier

$$\int dX = \pi \int y^2 dx = \pi \int (aa - xx) dx = \pi (aax - \frac{1}{3} xxx)$$

und $X = \pi (aax - \frac{1}{3} xxx)$, da X mit $x = 0$ seinen Anfang nehmen soll, also das constante Glied $= 0$ seyn müſste.

Für $x = a$ also die Halbkugel DEB $= \frac{2}{3} \pi aaa$; u. s. w.

Aufgabe.

§. 36. **Die elliptische Afterkugel zu kubiren.**

Auflösung. (Fig. 9.)

§. 37. AP $= x$ und P$\mathfrak{M} = \mathfrak{y}$ genannt, und c die kleine, a die groſse Halbaxe der Ellipse bedeutend, ist $\mathfrak{y}\mathfrak{y} = cc - \frac{cc}{aa} xx$. Das längs AP $= x$ sich erstreckende Stück S$\mathfrak{N}$ der elliptischen Afterkugel heiſse $\mathfrak{X}$, so ist

$$d\mathfrak{X} = \pi \mathfrak{y}^2 dx = \pi \left(\frac{aa\,cc}{aa} - \frac{cc}{aa} xx\right) dx = \pi \frac{cc}{aa} (aa - xx)\, dx$$

also $\int d\mathfrak{X} = \pi \frac{cc}{aa} \int (aa - xx)\, dx$

also $= \frac{cc}{aa}$ X, nach §. 35.; wo X das Kugelstück TN bedeutet.

Folglich auch die ganze elliptische Afterkugel $= \frac{cc}{aa}$ der Kugel, dessen Halbmesser a ist.

Zusatz.

§. 38. Da in der Auflösung §. 35. schon $X = \pi\,(aax - \frac{1}{3}xxx)$, für jedes x, also auch für $x+\triangle x$,

$$X + \triangle X = \pi\left(aa\,(x+\triangle x) - \frac{1}{3}\,(x+\triangle x)^3\right)$$ angegeben ist: so läſst sich hiedurch auch $\triangle X$, das ist, jedes zwischen zwei um $= \triangle x$ entfernten parallelen Kreisflächen, als Kugeldurchschnitten, enthaltene einzele Kugelstück finden.

Nach §. 37. also auch jedes Afterkugelstück $\triangle\mathfrak{X} = \frac{cc}{aa}\,\triangle X$; u. s. w.

Aufgabe.

§. 39. **Den parabolischen Afterkegel zu kubiren.**

Auflösung. Fig. 15.

§. 40. Nach bekannter Gleichung ist hier $yy = bx$, also den Afterkegel $A\mathfrak{M}M = X$ genannt, dessen $dX = \pi y^2\,dx = \pi\,b\,x\,dx$, folglich

$$X = \frac{1}{2}\,\pi\,b\,xx = \frac{1}{2}\,\pi\,y^2 . x + (\text{Const} =)\ 0,$$

weil mit $x = 0$, auch der körperliche Raum X des Afterkegels seinen Anfang $= 0$ haben muſs; indem des Afterkegels Axe AP hier $= x$ gesetzt ist.

Aufgabe.

§. 41. **Den gewöhnlichen geraden Kegel zu kubiren.**

Auflösung. Fig. 16.

§. 42. Sey AD = a und DB = b gegeben, auch AP = x und PM = y genannt: so ist $y = \frac{b}{a} x$. Das obere Kegelstück AM𝔐 werde X genannt, so ist

$$dX = \pi y^2 \, dx = \pi \frac{b^2}{a^2} x^2 \, dx,$$

folglich $X = \pi \frac{b^2}{a^2} . \frac{x^3}{3} + (\text{Const} =) \, o$, also auch $X = \pi . y^2 . \frac{x}{3}$; und der ganze gegebne Kegel $= \pi bb . \frac{a}{3}$.

§. 43. **Der schiefe Kegel**, Fig. 17.,

dessen in der Geometrie so genannte Axe AD = a um den spitzigen Winkel ADB = α gegen die Grundfläche $\pi . DB^{\square} = \pi . bb$ geneigt ist, stellt keinen solchen Axenkörper dar, der durch Drehung irgend einer ebnen Figur um AD, erzeugt werden könnte.

Aber der längs AP = x veränderliche Theil seines Körpers, A𝔐M, heiſse X, so ist längs PP′ = ‘dx das Functions-Differential $‘dX > \pi y^2 . ‘dx . \sin\alpha$ und immerfort auch dieses $‘dX < \pi (y + ‘dy)^2 . ‘dx . \sin\alpha$, so lange ‘dx und ‘dy dem = o sich nähernd sind; woraus erhellet, daſs mit ‘dx = dx = o, und somit auch ‘dy = dy = o geworden, das genaue Körper-Differential $dX = \pi y^2 . dx \sin\alpha = \pi \frac{b^2}{a^2} x^2 . dx \sin\alpha$. geworden seyn muſs.

Demnach

$$\int dX = \frac{\pi . b^2}{3 . a^2} x^3 \sin\alpha = \frac{\pi}{3} y^2 x \sin\alpha + (\text{Const} =) \, o.$$

§. 44. Anmerk. 1. Von diesem Infinitesimal-Kubiren hat man auf die Tonnenmessung (Pitometrie) sehr merkwürdige und praktisch nützliche Anwendungen gemacht, die ich hier schon mit aufführen würde, wenn ich nicht so viel eigenthümliche Erörterungen darüber mit beizubringen hätte, daſs es schicklicher seyn wird, späterhin, etwa in einem besondern Kapitel, sie vorzutragen.

§. 45. Anmerk. 2. Das Flächen-Differential und -Integral, oder kürzer gesprochen, das Flächen-Integrand, habe ich, sehr absichtlich, zuerst behandelt; und nächst ihm das Körper-Integrand. Einige dieser Absichten werden im IIIten Kapitel bemerkbar werden; hier aber hat diese Anordnung sogleich den Nutzen, darauf aufmerksam zu machen, daſs die nun folgenden Integranden, als Längen-Integranden zu betrachten sind. Und wiederum sehr absichtlich werde ich dabei auch die geradelinigen behandeln, obgleich dieses, meines Wissens, bisher nicht geschehen ist.

Vom Rectificiren.

Aufgabe. Fig. 18.

§. 46. Eine gerade Linie AF (ihr *Anfangs*punct mag in 'A' oder in A' oder in 'A liegend seyn) ist durch eine Gleichung zwischen orthogonalen Coordinaten 'A'P $=$ x und PM $=$ y gegeben; man soll durch Differential- und Integral-Methode ihre *Länge* finden.

Auflösung.

§. 47. Die verlangte Länge heiſse X, so ist ihr $'dX = MM' = \sqrt{('dx^2 + 'dy^2)} = \sqrt{\left(1 + \frac{'dy^2}{'dx^2}\right)} . 'dx$; also ihr genaues Differential $dX = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} . dx$.

Ist nun 'A'E $=$ a und EF $=$ b gegeben, so ist $y = \frac{b}{a}x$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$, folglich $dX = \sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.dx$, also $\int dX = \sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.x$, und $X = \sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.x + C$.

1) Ist 'A'F die gegebne Linie, so hat in 'A', also mit $x = 0$, auch die Länge X ihren Anfang $= 0$; ist daher die Constante $C = 0$, und demnach vollständig

$$X = \sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.x = \sqrt{(1 + (\tang \alpha)^2)}.x = x.\sec\alpha;$$

also für $x = a$ auch 'A'F $= a.\sec\alpha$.

2) Ist A'F die gegebne Linie, so ist auch ihre Länge X erst mit gegebnem $x =$ 'A'B', welches $= e$ heifsen mag, ihren Anfang nehmend; daher

das allgemeine $X = \sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.x + C$

ein $0 = \sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.e + C$ ist,

folglich $C = -\sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.e$ verlangen, und demnach die gesuchte Länge $X = x.\sec\alpha - e.\sec\alpha = (x - e).\sec\alpha$ seyn mufs.

3) Ist 'AF die gegebne Linie, so ist auch ihre Länge X in 'A, also 'A''B $= -e$ gesetzt, mit $x = -e$ ihren Anfang nehmend, daher

das allgemeine $X = \sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.x + C$

ein $0 = -\sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.e + C$ ist,

folglich $C = +\sqrt{\left(1 + \frac{bb}{aa}\right)}.e$ verlangen, und demnach die gesuchte Länge $X = x.\sec\alpha + e.\sec\alpha = (x + e).\sec\alpha$ seyn mufs.

Lehrsatz. (Fig. 19.)

§. 48. Auch für jede krumme Linie $X = BM$, durch Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben, ist ihr Längen-Differential

$$dX = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Beweis.

§. 49. Das Curvenelement MM′ mag concav oder convex, und so stark oder so schwach gekrümmt seyn, als es will: so muſs es (Diff. R. XX § 2.) einen Kreisbogen geben, der in jedem seiner Elemente mit dem Curvenelemente einerlei Krümmung hat. Von dem Kreiselemente aber ist es schon in Diff. R. IX. §. 17. strenge erwiesen, daſs dieses Bogenelement und dessen Sehne im Verhältnisse der Gleichheit verschwinden, im Verschwinden einander völlig gleich werdend sind. Die Sehne aber ist die Hypotenuse der beiden Katheten dx und dy.

Zusatz.

§. 50. Da (Diff. R. XIV. § 18) $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\varphi$ ist, wenn φ den Winkel zwischen den Katheten $MN = dx$ und der Hypotenuse MM′ bedeutet: so hat man auch $dX = \sqrt{(1 + \text{tang}\,\varphi^2)}\,.\,dx = \sec\varphi\,.\,dx$.

Bei der geraden Linie §. 47., war φ ein constanter Winkel, daher das Integral $X = \sec\alpha\,.\,dx$ leicht gefunden war. Bei krummen Linien ist die $\sec\varphi$ mit $\text{tang}\,\varphi$ oder dem Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$ und dessen $\frac{dy^2}{dx^2} = p^2$, eine so veränderliche Gröſse, daſs man genöthigt wird, die Function

$(1+pp)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe aufzulösen, um doch theilweise die Glieder integriren, und das Integral Näherungsweise angeben zu können.

Die Cykloide, von der wir handeln wollen, wo wir sie gebrauchen werden, macht eine merkwürdige Ausnahme. Dagegen selbst auch für die Parabel (welche sich so genau quadriren und kubiren liefs) das Längen-Integrand schwierig zu behandeln ist. Vega, dem als Artilleristen die Sache wichtig schien, hat durch Methoden, die ich hier noch nicht begründet habe, gefunden, dafs das Integrand als eine Differenz zwischen einem algebraischen genauen, und einem logarithmisch genauen Integral bestimmt werden kann.

Ueberhaupt aber wird es für uns genügen, irgend eine dergleichen annähernde Rectification durchgeführt zu sehen.

Aufgabe.

§. 51. **Die Kreislinie zu rectificiren.**

Auflösung. Fig. 7.

§. 52. Nach der Kreisgleichung $yy = aa - xx$, ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, also $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{x^2}{y^2}$. Den mit $CP = x$ veränderlichen Bogen $AM = X$ genannt, haben wir

$$dX = \left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{y^2+x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = a^2\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Da sich nun nach der binomischen Reihe (verglichen §. 21., wo sie auf $n = +\frac{1}{2}$ schon angewandt ist) für $n = -\frac{1}{2}$ ergeben mufs

$$(aa-xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{x^4}{a^5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^6}{a^7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{x^8}{a^9} + \ldots$$

unser dX aber $= a^2 (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ ist: so haben wir

$$dX = a \cdot \left(\frac{1}{a} dx + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^3} dx + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^4}{a^5} dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^6}{a^7} dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{x^8}{a^9} dx + \ldots\right)$$

$$\int dX = x + \frac{1.}{2.3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1.3.}{2.4.5}\frac{x^5}{a^5} + \frac{1.3.5.}{2.4.6.7}\frac{x^7}{a^7} + \frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.9}\frac{x^9}{a^9} + \ldots$$

Da es schon gesagt ist, daſs $X = AM$ seyn soll, dieser Bogen aber in A, also für $x = 0$ seinen Anfang nimmt; so muſs auch der eben gefundene veränderliche Theil des $\int dX$ den ganzen Bogen $X = AM$ darstellend seyn; der also selbst auch für $x = a$, also als der

$$\text{Quadrant } AM = a\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} + \ldots\right)$$

durch diese convergente Reihe angegeben wird. Noch stärker aber convergirend ergibt sich die Reihe für $x = \frac{a}{2}$, also für den

$$\text{Sextant} = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \ldots\right)$$ wodurch nun

als 6facher Sextant die

$$\text{Peripherie} = 2a\left(3 + \frac{1}{2^4} + \frac{9}{4.5.2^6} + \frac{9.5}{4.6.7.2^8} + \frac{9.5.7}{4.6.8.9.2^{10}} + \ldots\right)$$

und die Zahl der Parenthese $= \pi$ genannt,

die Peripherie $= 2a.\pi = 2a.3,1415926...$ kann gefunden werden:

auch log Brigg $\pi = 0,4971498 7269...$

und log nat $\pi = 1,1447298858\frac{1}{2}...$ sich ergibt.

Quadrirung einiger gekrümmten Oberflächen.

§. 53. Wenn die ebne Figur BDMP (Fig. 12.) um BP als Axe gedreht wird, so muſs der dadurch beschriebne Axenkörper auſser seinen ebnen und kreisförmigen Grundflächen eine gekrümmte Oberfläche erhalten, deren Krümmungen

1) der Abscissenrichtung gemäſs sich erstreckend, allenthalben in den Krümmungen des Bogens, DM bestehen, aber dabei

2) der Ordinatendrehung gemäſs in den Krümmungen der Kreislinien $2\pi y$ bestehen.

Lehrsatz.

§. 54. Heiſse X die Flächengröſse dieser zweifach gekrümmten Oberfläche, so muſs ihr Differential $dX = 2\pi y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ seyn.

Beweis.

§. 55. Von dem werdenden Bogendifferential MM′ wissen wir schon (§. 48.), daſs es mit seiner Sehne $\sqrt{('dx^2+'dy^2)}$ im Verhältnisse der Gleichheit verschwinden, also das genaue Bogendifferential

$$= \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx \text{ geben muſs.}$$

Durch die Sehne MM′ aber würde die gekrümmte Oberfläche des 'dX, als Oberfläche eines

abgestumpften Kegels, dessen $'dX$ mit $'dx$ immerfort kleiner und kleiner werdend gedacht,

immerfort $> 2\pi y . MM'$

und immerfort $< 2\pi(y + 'dy) . MM'$ seyn; daher sie mit $'dx = dx = o$, und somit auch $'dy = dy = o$ geworden, das genaue Differential

$$dX = 2\pi y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx \text{ geben mufs.}$$

Zusatz.

§. 56. Wenn in der umgedrehten ebnen Figur BDMP, die DM keine krumme, sondern gerade Linie wäre: so würde die in §. 53. unter 1) erwähnte Krümmung wegfallen, und schon ohne den Satz von der Gleichheit zwischen verschwindendem Bogen und Sehne, durch §. 55. erwiesen seyn, das $dX = 2\pi y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ das genaue Differential der gekrümmten Oberfläche X ist.

Folgerung.

§. 57. In beiden Fällen mufs daher

$\int dX = 2\pi \int y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$, den mit x und y veränderlichen Theil des Integrales $X + C$ ausmachen, dessen constantes Glied durch die Anfangsgränze des X zu bestimmen ist.

Oberfläche der Kugel.

§. 58. In der Kugel (Fig. 7.) sey $AP = x$, also nach ihrer Ordinatengleichung $yy = aa - xx$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, und demnach die

gekrümmte Oberfläche des Kugelstückes 𝔅BM𝔐, durch X benannt,

$$dX = 2\pi y\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi y\left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi a\, dx$$

also $\int dX = 2\pi a \,.\, x + (\text{Const} =)\ 0$; daſs also die krumme Oberfläche des Kugelstückes dieser cylindrischen Seitenfläche gleich ist; auch für $x = a$ die Oberfläche der Halbkugel, der Seitenfläche des Cylinders gleich ist, welcher mit der Halbkugel einerlei Grundfläche $\pi . aa$ und einerlei Höhe a hat.

§ 59. Anmerk. Ich kann den Raum nicht daran wenden, auch von den Huf-förmigen Körpern und ihren Oberflächen zu handeln, oder auch nur mehre Beispiele für den unmittelbaren und mittelbaren Gebrauch des obigen dX aufzuführen.

Drittes Capitel.

Integrale als Summen der dimensorischen Endgränzen betrachtet.

§. 1. In Diff. R. VI. §. 9. ist es schon bemerkt worden, daſs dort nur lauter solche Beispiele aufgeführt waren, in welchen die Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = y$, allemal die dem veränderlichen x zugehörigen Endgränzen nicht nur ausmachten, sondern auch diese y in allen Endpuncten eines von seinem constanten Anfangspuncte an stetig wachsenden x gedacht, sämmtlich einander gleich bleibend waren, und demnach, da überdies nur von rechtwinkligen Coordinaten x und y die Rede

war. durch jedes einzele y auch die allgemeine Grösse der sämmtlichen **zweiten Flächen-Dimensionen**, schon vollständig angegeben wurde; daher die Quadrirung dieser rechtwinkligen Flächenräume auch ohne Infinitesimal-Methode schon völlig bekannt ist.

§. 2. Beide diese Eigenschaften der y nämlich sind den y eines jeden Rechteckes $X = xy$ zugehörig, auch wenn dessen **Grunddimension** x und **Höhendimension** y, noch von einander unabhängig veränderlich gedacht werden, und daher $\frac{dX}{dx} = y$ allgemein den Differentialquotienten ausmacht.

§. 3. In einem nicht rechtwinkligen Parallelogramme X (Fig. 16) ist die Ordinate v ebenfalls eine dem veränderlichen x zugehörige Endgränze des X, die auch in allen Endpuncten des x sich gleich bleibend vorgefunden wird. Aber für zwei einander **dimensorische** Endgränzen der Fläche X kann man diese x und v nicht gelten lassen, weil sie **nicht einander normal** sind. (M. s. Vorerinnerung VI.)

§. 3. Im rechtwinkligen Dreiecke ABD (Fig. 17.) sind für dessen mit x veränderlichen Anfangstheil X, die x und y zwei einander normale, also dimensorische Endgränzen, obgleich die $y = \frac{BD}{AB}.x = \frac{b}{a}x$ einander **gleichbleibend** nicht sind, sondern mit x veränderlich sich ergeben müssen.

§. 5. Eben so verhält es sich mit den x und y im parabolischen Dreiecke (Fig. 19.), dessen Ordinaten y, nach der Gleichung $yy = bx$, als $y = b^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, immerfort mit x sich ändern müssen, dabei aber dem

x normale, also dimensorische Endgränzen allerdings ausmachen.

§. 6. Auch im schiefwinkligen Dreiecke (Fig. 19.), dessen Ordinaten v, weder einander gleich bleibend, noch den Abscissen x normal sind, ist es gleichwohl gewiſs, daſs die Flächengröſse X, durch die vollständige Summe aller längs x möglichen, und, mit stetig gewachsenem x, nach und nach als Endgränzen des stetig gewachsenen X vorhanden gewesenen v, auf das völligste bestimmt werden muſs.

§. 7. Da man aber bei geforderter Quadrirung des X verlangt, daſs dessen Flächengröſse durch Quadrate, oder doch durch andere Rechtecke, angegeben werde; auch diese zum allgemeinsten Maaſse der Flächen eben deſshalb am schicklichsten sind, weil bei ihnen die Flächengröſse durch zwei einander normale Richtungen, also rein dimensorisch bestimmt wird; so müssen nun für das schiefwinklige Dreieck X

entweder 1) die x als erste Grunddimensionen angenommen, dann v. sin α, als die Gröſse der im v nur vorhandenen Höhendimension, also als dimensorische Endgränze gebraucht werden; oder es muſs 2) die x. sin α, als erste Grunddimension angenommen, dann die ganze v, als eine der x. sin α zugehörige, rein dimensorische Endgränze benutzt werden.

§. 8. Wo man die Wahl noch frei hat, welches freilich nicht immer der Fall ist, da wird der ersten Vorstellung der Vorzug gebühren. Ihr gemäſs also angenommen, daſs die erste Dimension, die Grunddimension des zu quadrirenden X, der urbelegten x parallel seyn soll; so muſs dann jedes $\frac{dX}{dx}$ die, dem x

zugehörige dimensorische Endgränze, in einer dem x normalen Lage angeben.

Hat man nun, z. B. in dem parabolischen Dreiecke (§. 5.) die dimensorische Endgränze $y = b^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; bei dem geradelinigen Dreiecke (§. 4.) die dimensorische Endgränze $y = \frac{b}{a} x$; bei dem schiefwinkligen (§. 7.) die dimensorische Endgränze $y = x \sin \alpha$ gefunden: so kann man die verlangte Quadratur des X dadurch zu finden suchen, daſs man für die Gleichung $X = n.xy$ die Zahl n anzugeben sucht.

§. 9. Dabei kann nun zuvörderst die Frage aufgeworfen werden, ob vielleicht n eine constante, vom x und y unabhängige Zahl sey!

Da in diesem Falle $dX = n\,(y\,dx + x\,dy)$, also $\frac{dX}{dx} = n\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$, das ist, $y = n\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$, folglich $n = \frac{1}{1 + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}}$ seyn müſste: so wird in diesem Falle auch $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$ irgend eine constante, von x und y unabhängige Zahl ausmachen müssen.

§. 10. Für die Parabel $yy = bx$, hat man $2y\,dy = b\,dx$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y}$, also

$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x.b}{y.2y} = \frac{yy}{2yy} = \frac{1}{2}$; also $n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, und somit das parabolische Dreieck $= \frac{2}{3} xy$ gefunden.

Für das rechtwinklige Dreieck hatten wir $y = \frac{b}{a} x$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$, also $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}.\frac{b}{a} = 1$,

also $n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; und somit das rechtwinklige Dreieck $= \frac{1}{2}xy$ gefunden.

Für das schiefwinklige haben wir

$X = nxy = nx.x \sin\alpha$, übrigens wiederum $n = \frac{1}{2}$,

also das schiefwinklige Dreieck $= \frac{1}{2} x.v \sin\alpha$.

§. 11. Wollte man auch bei dem Kreise $yy = aa - xx$, nach einem constanten n fragen: so würde sich $\frac{x}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.-\frac{x}{y} = -\frac{xx}{yy}$, also auch $n = \frac{yy}{yy-xx} = \frac{aa-xx}{aa-2xx}$, nicht constant, sondern mit x veränderlich ergeben.

Mufs nun aber im geforderten $X = n.xy$ auch n veränderlich vorausgesetzt werden; so hat man

$$dX = nydx + nxdy + yxdn,$$

das ist $y = ny + nx\frac{dy}{dx} + yx\frac{dn}{dx}$,

also $1 = n + n\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + x\frac{dn}{dx}$,

also $n:\left(1+\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}\right) = 1 - x\frac{dn}{dx}$. Diese Gleichung und die daraus folgende

$1 + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} - \frac{d\log n}{d\log x}$, dürften die Frage veranlassen, ob sich vielleicht durch algebraische und logarithmische Functionirung zusammen genommen der Kreis genau quadriren lasse! Oder ob sich etwa ein einzeler Werthfall des x angeben lasse, bei welchem die sämmtlichen Functionirungen, welche der aufgefundene Ausdruck des n verlangt, einander dergestalt aufhebend wären, dafs vermittelst dieses

Werthfalles sich sogar ein constantes n als Factor des veränderlichen x ergebe! Bei Quadrirung der Kugeloberfläche wird sich (§. 21.) ein Beispiel dafür in der Kürze darstellen lassen. Ueber solche Untersuchungen weitläuftig zu werden, würde dem Zwecke dieses Lehrbuches nicht angemessen seyn.

Auch will ich hier keinen Raum daran wenden, um zu zeigen, wie man durch den Ausdruck des n in §. 9. alle die Curven finden könne, deren X sich durch ein constantes n als $= n.xy$ angeben lasse.

§. 12. In jedem **körperlichen** Integranden $\int dX = \int \mathfrak{x} dx$ würde nach unsern obigen Darstellungen, durch $\mathfrak{x}$, als eine Function des x, eine ebne Figur bestimmt seyn, welche auch fernerhin, wie in unsern obigen Beispielen, II. §. 4, auf eine Kreisfläche πyy eingeschränkt bleiben mag, deren Halbmesser y durch eine zwischen x und y gegebne Gleichung als eine Function des x bestimmt wird.

Wenn nun x, folglich auch dx, der Ebne πyy normal ist: so ist $\frac{dX}{dx} = \pi yy$ die dem x zugehörige dimensorische Endgränze.

Sind aber x und πyy unter einem spitzen Winkel α gegen einander geneigt, wie bei dem schiefen Kegel, II. §. 4: so kann man benutzen

entweder 1) daſs $\pi yy \sin\alpha$ die dem x zugehörige dimensorische Endgränze des X,

oder auch 2) daſs πyy die dem $x \sin\alpha$ zugehörige Endgränze des X ist.

Im letzten Falle muſs man sich statt des Differentiales dx das Differential $\sin\alpha . dx$ angelegt, also auch $\frac{dX}{\sin\alpha . dx}$ als den Differentialquotienten vorstellen.

§. 13. Wenn wir auch hier die Frage aufwerfen, welche körperliche Integranden $\int \pi yy\,dx$ als $\int dX = n . \pi yy x$ mit constantem n sich ergeben müssen: so folgt aus der Voraussetzung eines constanten n, dafs $dX = n(\pi yy\,dx + 2\pi xy\,dy)$,

$$\text{also } \frac{dX}{dx} = n\left(\pi yy + 2\pi xy\frac{dy}{dx}\right),$$

$$\text{das ist } \pi yy = n\left(\pi yy + 2\pi xy\frac{dy}{dx}\right),$$

$$\text{also } 1 = n\left(1 + \frac{2x}{y}\frac{dy}{dx}\right) \text{ seyn müsse.}$$

Für den parabolischen Afterkegel (II. §. 40.) ist $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2y}$, also $n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

§. 14. Im Längen-Integrand $X = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \int \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$ dürfte es schwierig scheinen, auch hier zu behaupten, dafs der Differentialquotient $\frac{dX}{dx} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, als eine dem veränderlichen x zugehörige dimensorische Endgränze zu betrachten sey; wenn wir nicht zuvörderst schon in der Vorerinnerung VI. es dargethan hätten, wie ein Product aus zwei Factoren als eine Gröfse mit zwei arithmetischen Dimensionen zu betrachten sey; und im vorigen Kapitel nicht nur statt der gewöhnlichen Ausdrücke Bogen-Differential und Bogen-Integral, treffender und allgemeiner richtig, Längen-Integrand gebraucht, sondern auch an der geraden Linie AF im dortigen §. 4. es vor Augen gelegt hätten, wie auch für eine solche gerade Linie, durch eine Gleichung zwischen orthogonalen Coordinaten x und y gegeben, ihre Länge durch Differential- und Integral-Methode als $= x . \sec\alpha$, also als

ein Product aus der Länge x und der Zahl sec α gefunden wird.

§. 15. Wenn nun überhaupt eine krumme Linie AF, durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist, und vermittelst der Infinitesimal-Methode rectificirt werden soll: so verlangt man ihre Länge X als ein $= n.x$, als ein n maliges x zu finden. (Der Kürze wegen vorausgesetzt, daſs die X mit $x = o$ ihren Anfang nehmen solle. Sollte dagegen ihr Anfang einem $x = \mp c$ zugehören, so würde man $X = nx + C = nx \mp nc$ zu finden haben.)

Für die gerade Linie AF, haben wir ihre Länge $X = \sec\alpha . x$; woraus erhellet, daſs wir im gesuchten $X = n.x$ das constante $n = \sec\alpha$, dem bei ihr constanten Winkel α zu verdanken haben. (II. §. 47.)

Bei einer krummen Linie AF würden wir dagegen $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi$ mit veränderlichem Winkel φ haben, also

$$\int dX = \int\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int(1 + \operatorname{tang}\varphi^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int \sec\varphi . dx;$$

welches als $= n\alpha$ im Allgemeinen nur durch ein mit x veränderliches n kann angegeben werden.

§. 16. Bei der Cykloide, deren Rectificirung durch trigonometrische Integrirung am bequemsten zu finden, und deshalb bis dahin verschoben ist, wird sich ein solches veränderliches n ergeben, welches für einige Werthfälle der veränderlichen Gröſse eine constante Zahl ausmacht.

§. 17. Für diejenigen gekrümmten Oberflächen, welche im vorigen Kapitel von §. 53. an

nur behandelt sind, war $dX = 2\pi y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$ die allgemeine Differentialform; daher auch $\int \frac{dX}{dx} = \int 2\pi y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ seyn müfste, und somit wiederum das gesuchte Integral als eine Summe der sämmtlichen längs x möglichen dimensorischen Endgränzen zu denken wäre. Denn obgleich nicht zu läugnen ist, dafs jeder Kreis $2\pi y$ an sich schon eine mit x veränderliche Endgränze des X ausmacht: so würde doch die Ebne dieser Kreislinie nicht dem $'dx = dx = 0$, sondern nur dem $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \sec\varphi \, . \, dx$ normal seyn. Oder wenn man lieber dem x gemäfs die Grunddimension annimmt, so mufs dann $2\pi y \, . \sec\varphi$ die durch $2\pi y$ vorhandene, dem x, und daher auch dem dx normale, dimensorische Endgröfse angebend seyn.

§. 18. Indem wir nun die y und x als von einander abhängig veränderlich, und namentlich y als Function des x gegeben fordern: so werden wir das Integrand $\int dX = 2\pi \int y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$, als ein $= 2\pi y x \, . \, n$ anzugeben wissen, wenn wir die Zahl n zu finden vermögen.

§. 19. Stellen wir hier wiederum die Frage auf, ob vielleicht $X = n \, . \, 2\pi y x$ vermittelst eines constanten n könne angegeben werden: so ist gewifs, dafs bei constantem n

$$\frac{dX}{dx} = n \, . \, 2\pi \left(y + x \frac{dy}{dx}\right) \text{ würde seyn müssen.}$$

Da nun $\frac{dX}{dx} = 2\pi y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ seyn mufs (§. 17.), so mufs $n \left(1 + \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}\right) = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ seyn.

§. 20. Auch hier wollen wir wiederum diese Bestimmung des n nur auf einen einzelen vorgegebnen Fall, auf die in II. §. 58. bereits gefundene Oberfläche der Kugel anwenden.

Dafür, wie dort, die Ordinatengleichung $yy = aa - xx$ gebraucht, haben wir $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$,

also $n\left(1 - \frac{xx}{yy}\right) = \left(1 + \frac{xx}{yy}\right)^{\frac{1}{2}}$

das ist, $n\,\frac{yy - xx}{yy} = \frac{a}{y}$, also $n = \frac{ay}{yy - xx}$; und so wird hiemit die Frage, ob in der Gleichung $X = n.2\pi yx$, auf die Kugeloberfläche angewandt, ein constantes n Statt finde, freilich verneinend beantwortet, so lange von diesem n verlangt wird, daſs es bei jedem Werthe des x einerlei constante Zahl seyn solle.

§. 21. Bedenken wir aber, daſs für $y = a$ gesetzt, das ihm zugehörige $x = o$ ist: so erhellet sogleich, daſs wir allerdings ein $n = \frac{aa}{aa}$, also $n = 1$ würden gefunden haben, wenn wir nicht nach einem $X = n.2\pi y.x$, sondern nach einem $X = n.2\pi a.x$ gefragt hätten; welches nun das in §. 11. versprochene Beispiel ist.

Es folgen noch einige

Anmerkungen über die Summirung der dimensorischen Endgänzen.

§. 22. Da jede dem veränderlichen x zugehörige Endgränze der Function X durch den genauen Differentialquotienten $\frac{dX}{dx} = p$ bestimmt wird, solch ein genauer Differentialquotient aber ein $\frac{o}{o} = p$ ist, und

von dieser Gröfse, als einer dimensorischen Endgränse, in geometrisch anschaulicher Sprache von uns gefordert wird, dafs sie dem dx normal sey: so dürfte uns die Frage entgegnet werden, ob man auch von einer Linie dx = o geworden, noch sagen könne, dafs sie der Gröfse p (sie mag durch eine Linie oder ebne Fläche dargestellt gedacht werden) noch normal gerichtet sey!

Aber da man für das werdende Differential 'dX = 'p 'dx es gerne zugesteht, dafs 'dx, so lange es noch irgend einige lineäre Gröfse an sich hat, auch so gut, wie x selbst, dem 'p normal gerichtet bleiben mufs: so würde eben dasselbe auch für 'dx = dx = o und 'p = p geworden, nach dem Gesetze der Stetigkeit schon zu behaupten seyn.

Ueberdiefs aber mufs man die Richtung eines Punctes, welcher eine gerade Linie beschreibt, von der beschriebenen Linie selbst, gleichsam als Ursachtheil und Wirkungstheil (um in der Kürze mich auszudrücken) zu unterscheiden wissen.

§. 23. Obgleich nach unserer obigen Darstellung die Bestimmung der dimensorischen, normalen Richtung einige Aufmerksamkeit erforderte: so braucht uns doch dieses für die calculatorische Anwendung keine Sorge zu machen. Denn wenn wir aus dem werdenden Differential 'dX = 'p 'dx, auf den werdenden Differentialquotienten $\frac{'dX}{'dx} = {}'p$, und aus demselben, durch 'dx = dx = o geworden, auf den genauen Quotienten $\frac{dX}{dx} = p$, also auf das genaue Differential dX = p . dx geschlossen haben: so müssen ja die beiden Gröfsen p und dx einander factorirt, das ist, einander arithmetisch dimensorisch seyn.

§. 24. Durch eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$, sey die Curve LDMR (Fig. 29.) bestimmt, und $X = BDMP$ eine ebne Fläche, welche in der Ordinate BD ihre constante Anfangsgränze, in der Ordinate PM, ihre mit $AP = x$ veränderliche, ebenfalls dimensorische Endgränze hat: so würde, ihre veränderliche Grunddimension $BP = BA + AP = -a + x$, in $\frac{-a+x}{x^0} \cdot \frac{x^0}{10}$ zertheilt gedacht, diese Fläche X selbst ein Aggregat aus $\frac{-a+x}{x^0} \cdot 10$ Flächentheilen ausmachen, von denen jeder einzeln genommen, wiederum ein Aggregat aus einem rechtwinkligen Parallelogramme $y \triangle x$ und Dreiecke $\frac{\triangle y}{m} \cdot \triangle x$ ausmacht, dessen m von der Zahl 2 desto weniger verschieden seyn wird, je weniger die krumme Seite des Dreieckes von einer geradelinigen Hypotenuse der beiden Katheten $\triangle x$ und $\triangle y$ abweichend ist; die Belegung $\triangle x = \frac{x^0}{10}$ genommen, und $\triangle y$ die dadurch bewirkte Belegung der Function y bedeutend (vergl. Diff. R. III. §. 26.); auch A g g r e g a t e oder a l g e b r a i s c h e Summen hier genannt, weil einige von den y, und eben so auch von den $\triangle y$, bejaht, und andere verneint gerichtet seyn können.

§. 25. Wenn daher

$$\overset{1\ldots(10)}{\mathfrak{S}}(y) = \overset{1}{y} + \overset{2}{y} + \overset{3}{y} + \ldots + \overset{(10)}{y}$$

und

$$\overset{1\ldots\ldots(10)}{\mathfrak{S}}\left(\frac{\triangle y}{m}\right) = \frac{\overset{1}{\triangle y}}{m} + \frac{\overset{2}{\triangle y}}{m} + \frac{\overset{3}{\triangle y}}{m} + \ldots + \frac{\overset{(10)}{\triangle y}}{m}$$

nämlich $\overset{1\ldots(10)}{\mathfrak{S}}(y)$ die algebraische Summe der $(10) = \frac{-a+x}{x^0} \cdot 10$, längs $-a+x$ auf einan-

der folgenden y, und $\overset{1\ldots(10)}{\mathfrak{S}}\left(\frac{\Delta y}{m}\right)$ die algebraische Summe der (10) auf einander folgenden $\frac{\Delta y}{m}$ bedeutet: so haben wir

$$\text{die Fläche } X = \left(\overset{1\ldots(10)}{\mathfrak{S}}(y) + \overset{1\ldots(10)}{\mathfrak{S}}\left(\frac{\Delta y}{m}\right)\right).\Delta x$$

$$= \overset{1\ldots\ldots\ldots(10)}{\mathfrak{S}}\left((y) + \left(\frac{\Delta y}{m}\right)\right).\frac{x^o}{10};$$ und würden

eben so $X = \overset{1\ldots\ldots\ldots(100)}{\mathfrak{S}}\left((y) + \left(\frac{\Delta y}{m}\right)\right).\frac{x^o}{100}$ haben, wenn wir $\Delta x = \frac{x^o}{100}$ genommen hätten.

Eben so daher auch $X = \overset{1\ldots\ldots\ldots(\infty)}{\mathfrak{S}}\left((y) + \left(\frac{\Delta y}{m}\right)\right).\frac{x^o}{\infty}$, wenn $\Delta x = {}'dx = \frac{x^o}{\infty}$ gefordert wird, also ∞ eine immerfort gröſser und gröſser werdende Zahl bedeutet.

§. 26. Da jede dieser 'dx eine stetige Linie ist, die in dem jedesmaligen Endpuncte des stetig von dem $x = a$ an wachsenden x ihre Anfangsgränze hat: so muſs sie auch bis zu dieser ihrer jedesmaligen Anfangsgränze hin abnehmend gedacht, und zu ihrer Anfangsgränze selbst geworden, können gefordert werden. Und diese Forderung, daſs $'dx = dx = o$ geworden, bis zum einzigen Puncte verkleinert gedacht werde, ist schlechterdings nöthig, wenn die Methode der Differential- und Integralrechnung der Euklidisch-geometrischen Strenge und Wahrheit völlig adäquat geworden seyn soll. Denn so ausge-

macht wahr es auch ist, daſs in dem Rechtecke $y.{}'dx$, dessen Breite $'dx$ als eine lineäre Gröſse, als irgend ein noch so kleines $\frac{1}{n}$-tel der linearen Einheit $1 = x^{\circ}$, als irgend ein $\frac{1}{n}$ I angegeben, durch jedes $\frac{1}{n} > 0$ zu groſs angegeben seyn würde, für jedes $'dx$, welches nicht mehr aus einer unendlich groſsen Anzahl von Puncten bestände; so muſs doch der geometrischen Strenge wegen hier gefordert werden, daſs das Rechteck $y.{}'dx$ als $y.dx = y.\frac{x^{\circ}}{\infty}$, zu einer Linie y geworden, also die immerfort abnehmende Breite $'dx$ des Rechteckes $y.{}'dx$, bis zu einem einzigen Puncte eingeschwunden seyn soll.

§. 27. Obgleich nun schon in des $'dx$ arithmetischem Ausdrucke $= \frac{x^{\circ}}{\propto} = \frac{1}{\propto}$, die $\propto$ eine immerfort gröſser und gröſser werdende, also niemals erreichbare, unendliche Zahl bedeutend seyn muſs; so muſs doch ∞ ein Vollgroſs dieser unangeblichen Zahlen $\propto$ bedeutend seyn, wenn $dx = \frac{1}{\infty}$ einen einzelen Punct der lineären Einheit $1 = x^{\circ}$ ausdrückend seyn soll. Dergleichen Ausdrücke aber müssen wir haben, wenn wir unsere Infinitesimalrechnung auf geometrisches Quadriren, Cubiren und Rectificiren anwenden wollen, also Linien von Puncten auch arithmetisch unterscheidbar müssen auszudrücken wissen.

§. 28. So gewiſs es nun auch ist, daſs im $dx = \frac{x^{\circ}}{\infty} = \frac{1}{\infty} =$ einem Puncte, indem die $x^{\circ} = 1$ irgend eine beliebige endliche lineäre Einheit ausma-

chen soll, die ∞ als die vollgrofse Zahl ihrer Puncte eine unendliche, unerreichbare Zahl seyn mufs: so ist es doch eben so gewifs, dafs nun in der Linie $-a+x$ die Anzahl ihrer Puncte $= \frac{-a+x}{1} . \infty$ seyn mufs; also auch die Anzahl aller der unendlich vielen, längs der Linie $-a+x$ möglichen y, durch (∞) angedeutet,

$$\text{ebenfalls } (\infty) = \frac{-a+x}{1} . \infty \text{ seyn mufs.}$$

Daher wir nun in völligster Strenge haben, dafs

$$\text{die Fläche } X = \left(\overset{1...(\infty)}{S}(y) + \overset{1...(\infty)}{S}\frac{dy}{m}\right) . dx = \overset{1...(\infty)}{S} . (y) . \frac{x^0}{\infty}$$

seyn mufs.

Dafs ich in dem letzten Ausdrucke die sämmtlichen $\frac{dy}{m}$ geradezu weggelassen habe, wird uns kein Bedenken verursachen, da wir nach Diff. R. II. §. 25. allgemein überzeugt sind, dafs mit jeder Urbelegung $'dx = dx = o$ geworden, auch jede dadurch bewirkte Functionsbelegung $'dy = dy = o$ geworden seyn mufs.

Alle übrigen Bedenklichkeiten, welche gegen die Sache selbst, oder gegen meinen arithmetischen Ausdruck derselben, mir entgegnet werden könnten, dürften durch die nunmehr noch folgenden Erörterungen gehoben seyn.

§. 29. Wo man $\dot{y} = \frac{\overset{1...(\infty)}{S}(y)}{(\infty)}$, also $\dot{y}$ als die mittlere Gröfse der sämmtlichen, längs der Grundlinie $-a+x$ vorhandenen Endgränzen y anzugeben

wüfste, da würde man auch $\overset{1...(\infty)}{\mathfrak{S}}(y) = (\infty).\dot{y}$
$= \frac{-a+x}{1}.\infty.\dot{y}$, also

die Fläche $X = \frac{-a+x}{1}.\infty.\dot{y}.\frac{1}{\infty} = (-a+x).\dot{y}$, als dieses Rechteck, anzugeben wissen.

Für die gerade Linie DM (Fig. 21.) sey $AP = x$ und das $x = AB = a$, also $BP = -a+x$: so würde von allen längs BP möglichen y die erste $y = BD$, die letzte $y = (-)^{\cdot} PM = -(+) MP$, und von allen längs $BP = -a+x$ vorhandenen y, die mittlere Gröfse $\dot{y} = \frac{BD}{2} - \frac{MP}{2} = \frac{BD-MP}{2}$ seyn; daher hier die Fläche $X = (-a+x).\dot{y} = BP.\frac{BD-MP}{2}$ seyn mufs.

In diesem Beispiele ist die mittlere Gröfse $\dot{y}$, und vermittelst derselben die Flächengröfse X, als Rechteck, schon durch Elementargeometrie anschaulich erweisbar.

§. 30. Für die parabolische Fläche $X = BDMP$ (Fig. 4.) gibt es auch ein genau angebliches mittleres $\dot{y} = \frac{2}{3}(PM - BD)$, welches aber als solches ungleich schwieriger, als das vorige $\dot{y} = \frac{BD-MP}{2}$ bei der geradelinigen Fläche, zu finden seyn würde. Bei den allermeisten krummlinigen Flächen sind diese $\dot{y}$ nicht von einer solchen Gröfse, dafs man vermittelst irgend eines endlichen Theiles einer endlichen Lineareinheit sie genau zu messen und anzugeben vermöchte. Solche genaue Messung würde ja schon im Allgemeinen, bei allen Werthen des x und y, nicht mehr vorhanden seyn, wenn $\dot{y} = \Upsilon xy$, also

noch algebraisch functionirt wäre. Dessen ungeachtet aber ist es geometrisch, als mittlere Proportionale, vermittelst der endlichen Linien x und y, ganz genau angeblich, und zwar eben deſshalb genau angebliah, weil in und mit solchen Linien x und y, auch das Verhältniſs der vollgroſsen Zahlen $\frac{x}{I}\cdot\infty$ und $\frac{y}{I}\cdot\infty$ gegeben ist, welche die unendliche Menge der in diesen Linien enthaltenen Puncte angeben würden, wenn es möglich wäre, unendlich groſse Zahlen wirklich anzugeben. Wäre $\dot{y}$ eine logarithmische oder trigonometrische Function, so lieſse sich ebenfalls durch geometrische Constructionen es darthun, wie sie geometrisch genau sich ergeben müſsten. Mag nun aber auch $\dot{y}$ eine andere transcendente Gröſse seyn, die man anders, als durch convergente Reihen näherungsweise auszudrücken nicht vermag: so ist doch gerade durch diese unendliche Annäherung es gewiſs, daſs jedes solches $\dot{y}$ eine geometrisch genau bestimmte Linie seyn muſs; weil es der Geometrie ja nicht an Puncten fehlt, wohl aber der Arithmetik an der Zahl ∞, um den Punct als $\frac{I}{\infty}$ für irgend eine endliche lineäre Einheit I wirklich anzugeben.

§. 31. Der Punct (der Euklidische, in Beziehung auf die Linie definirt) ist das untheilbare Element der Linie; aber keineswegs ein geometrisches Nichts der Linie, sondern ein Etwas. Wie könnte sonst von dem Puncte B, wenn er sich auf dem kürzesten Wege bis P bewegt, die gerade Linie BP beschrieben seyn!

Da nun dx die zum Puncte dx gewordene Belegung 'dx bedeutet, womit z. B. in Fig. 20. nach §. 24. die Abscisse x vom x = AB = a an, bis zum

x = AP hin, während ihres ganzen stetigen Wachsens längs dieser Linie BP = — a + x, belegt zu denken ist: so muſs die unzählbare Menge aller dieser Puncte dx, in dem Aggregate

$$\text{der } \overset{1}{dx} + \overset{2}{dx} + \overset{3}{dx} + \ldots\ldots + \overset{(\infty)}{dx} \text{ bestehen,}$$

wenn (∞) die unaufzählbare Menge der Endgränzen bedeutet, welche dem x, längs BP = — a + x stetig wachsend, nach und nach zukommen könnten.

§. 32. Unzählbar aber, das heiſst, zu groſs, um durch irgend eine angebliche Zahl aufgezählt zu werden, muſs die Menge der Puncte in der, als Linie angeblichen BP nicht nur, sondern auch in jeder als Linie angeblichen Linear-Einheit I schon seyn; wenn der Punct das untheilbare Element der Linie seyn soll.

§. 33. Denn wenn man annehmen wollte, daſs es irgend eine noch so kleine Linie gebe, welche aus einer endlichen, angeblichen Zahl von Puncten bestände; so müſste man zugeben, daſs auch zwei Puncte aneinander gelegt, schon eine Linie ausmachen.

An solche Linie AB = 2 Puncten, denke man sich eine zweite Linie BD = 6 Puncten, so gelegt, daſs dadurch die grade Linie AD = 8 Puncten erhalten werde. Mit deren Hälfte AC = 4 Puncten, um C einen Halbkreis beschrieben, und bis an diesen aus B die normale BE errichtet,

müſste AB : BE = BE : BD in Linien
und 2 : x = x : 6 in Zahlen seyn;

folglich xx = 2 . 6 = 12, und daher x = $\sqrt{12}$.

Da die Linie BE, im Puncte B anfangend gedacht, auch im Puncte E ihr ganz genau bestimmtes

Ende hat: so muſs sie eine geometrisch ganz genau bestimmte Gröſse ausmachen. Da nun aber x = 3 genommen, eine zu kleine Anzahl von Punkten, und x = 4 angenommen, schon eine zu groſse Anzahl von Puncten ausmachen würde, um die Linie BE nach Puncten zu messen: so muſs diese Linie BE aus 3 Puncten, und noch Theilen des Punktes bestehen, von welchen sich bekanntlich erweisen läſst, daſs sie unendlich kleine Theile seyn müſsten; wäre also hiemit erwiesen, daſs der hier angenommene Punct (die Hälfte der kleinsten, aus 2 Puncten bestehenden Linie) ins Unendliche theilbar noch müſste gefordert werden!

§. 34. In Baumgartens Metaphysik findet man als Definition der Linie: *series punctorum, punctis distantibus interpositorum, continua, est linea.* Und da er hinzufügt: *extensio lineae ex numero punctorum, quibus constat, determinatur:* so mag man Recht haben, wenn man behauptet, daſs hier *Series* (Reihe oder Folge), aus einer wirklich aufzählbaren Menge von Puncten bestehend, von ihm verstanden sey.

Dann hat man auch volles Recht zu folgern, daſs zwei Baumgartensche Puncte aneinander gelegt, schon eine kleinste Linie ausmachen, also der Punct dieses berühmten Philosophen ganz genau die Hälfte seiner kleinsten Linie seyn muſs.

Obgleich es nun noch eine dritte Definition des Punctes, als Linien-Elementes, nicht geben kann: so will ich mir doch, die sämmtlichen mathematischen Puncte in Euklidische und Baumgartensche abzutheilen, deſshalb nicht erlauben, weil mir aus meiner Jugend her der Name dieses damals sehr verehrten Philosophen ausgezeichnet achtungswerth geblieben ist, und ich ja eben so richtig in

Euklidische, und Nicht-Euklidische Puncte abtheilen kann; indem der Euklidische Punct das untheilbare, und jeder Nicht-Euklidische Punct einen aufzählbaren Theil der Linie ausmacht; (also auch die kleinste Linie allemal aus zwei solchen Punkten aneinander gelegt, bestehen muſs.)

§. 35. Jede Linie der Mathematiker muſs als Linie gegeben seyn; und möchte diese noch so klein gegeben seyn: so würde man über ihre Gröſse durch Puncte ausgedrückt, für jede Linie einzeln genommen, etwas anderes nicht zu sagen wissen, als daſs sie aus einer unzählbaren Menge, aus einer unendlich groſsen Anzahl von Puncten bestehe. Um indessen statt des verneinenden Ausdruckes einen bejahenden zu gebrauchen, würde ich sie eine ewige Zahl genannt haben, wenn nicht der Ausdruck, vollgroſs, als allgemeiner und selbstständiger, sich mir empfohlen hätte; indem die Ewigkeit selbst, ein Vollgroſs der Zeit ist.

§. 36. Eine Ewigkeit der Existenz wird der Gottheit wenigstens, auch *a parte ante*, nicht bloſs *a parte post*, jene erstere also in jedem gegenwärtigen Zeitpuncte schon als wirklich verlaufen zugestanden *). Da man an diese beiden Ewigkeiten, die wir im Teutschen kurz und gut durch Vorewigkeit und Nachewigkeit unterscheiden können,

*) Den Mathematikern des Auslandes dürfte diese Requisition allerdings etwas grell erscheinen. Teutsche Mathematiker aber werden es wissen, wie überkräftig wir fordern müssen, wenn unsere neueren Natur-Philosophen uns etwas zugestehen sollen. Daſs lediglich eine Administration uns zugestanden wird, versteht sich von selbst, weil selbsterworbenes Eigenthum nur bei ihnen zu suchen ist; womit sich übrigens sehr gut verträgt, daſs der eine den Besitzthum des andern für ein sehr fehlerhaftes Hirngespinst erklärt.

schon gewöhnt ist: so hoffe ich in der Kürze verständlich zu werden, wenn ich sage, daſs von zwei parallelen Linien, eine jede derselben sowol vorewig, als nachewig muſs gefordert werden, und eben darin das ihnen zukommende Vollgroſs bestehen muſs.

§. 37. Wenn wir dagegen eine trigonometrische Tangente, $A.\tang\varphi$, vor Augen nehmen: so ist es in dem Begriffe derselben schon begründet, daſs sie in dem Anfangspuncte des Bogens $A.\varphi$ ihren bestimmten Anfang habe; daher denn selbst auch bei einem unendlich groſsen Halbmesser U, die $U.\tang 90°$, dieses Tangenten-Vollgroſs für den Halbmesser U, mehr als eine nachewige, einseitig ewige Linie nicht würde ausmachen können.

§. 38. Sey nun aber A irgend einen endlichen Halbmesser, und B einen gröſseren dergleichen bedeutend: so ist es gewiſs, daſs von den beiden vollgroſsen Tangenten, $A.\tang 90°$ und $B.\tang 90°$, der zweite länger als der erste seyn muſs, und zwar immerfort mehr und mehr, je gröſser B gegen A gegeben wäre. Denn vollgroſs wird von uns (nach Vorerinner. VII §. 5.) eine Gröſse genannt, die allen ihr möglichen (ihrem Begriffe angemessenen) Wachsthum vollendet hat; wie es bei dem Wachsen jeder trigonometrischen Tangente des Bogens φ geschehen seyn muſs, sobald der Bogen φ zum Quadranten geworden ist. Denn sobald der Bogen φ über den Quadranten hinaus sich vergröſsert, so muſs ja dessen Tangente nach der geometrischen Scala der trigonometrischen Tangenten sich wieder verkleinern *).

*) Nach der geometrischen Scala, wie ich aus dem Begriffe der Drehung in meinen Neuen Erörte-

§. 39. Möchte A noch so klein gegeben seyn, so ist A. tang $90° = A. \tang \frac{\pi}{4}$, das dem Halbmesser A zugehörige Tangenten-Vollgrofs, welches durch ein stetig wachsendes A. tang ϕ abgereicht seyn mufs, wenn der Bogen φ bis zum $\varphi = \frac{\pi}{4} = 90$ Gradbogen hin stetig wachsend gefordert, und stetig wachsend gewesen ist.

Dabei mufs nun, das immerfort noch wachsende A. tang $\varphi = A.(\infty)$ geschrieben, die immerfort wachsende Zahl (∞), mit $\varphi = 90$ Gradbogen geworden,

---

rungen über Plus und Minus etc. Seite 95 etc., sie anschaulich erwiesen habe, um durch diese einleuchtend schickliche Scala, mit Hülfe der algebraisch nothwendigen und hier geforderten bejahten trigonometrischen Einheit, auch die empirisch entstandene, gewöhnliche Tangenten-Scala, als richtig zutreffend, wissenschaftlich rechtfertigen zu können. Wer sich dagegen unmittelbar der gewöhnlichen trigonometrischen Scala hier überlassen, und so geradezu es zugestehen will, dafs die A log ϕ, indem der Bogen ϕ bis zum $\frac{\pi}{4} = 90$ Gradbogen hin, und über denselben hinaus, stetig wachsend gewesen ist, aus $= +\infty$ plötzlich in $= -\infty$ übergegangen seyn müsse! — Wer so etwas zuzugeben für systhematisch nöthig hält, wird allerdings sehr wohl thun, über das Tangenten-Vollgrofs, A tang 90°, lediglich sagen zu wollen, dafs sich ein weiteres nicht darüber aussprechen lasse, als dafs es eine unangebliche Gröfse sey. Nach meiner Neuen Theorie des Gröfsten und Kleinsten, deren in Differ. R. XVII. erwähnt ist, kann ich hier noch in der Kürze hinzufügen, dafs A tang 90° nach der geometrischen Scala ein zweiseitiges Maximum, nach dem gewöhnlichen Gebrauche der algebraischen Scala aber, ein einseitiges Maximum ist.

allen ihr möglichen Wachsthum abgereicht haben, also zum Vollgrofs der Tangentenzahl geworden seyn, welches wir durch (∞) andeuten wollen; und von welchem wir es deutlich werden darzulegen wissen, wie es zu einem anderen, zu dieser Erörterung uns nothwendigen Vollgrofs ∞ sich verhaltend sey.

§. 40. Da es dem Begriffe einer jeden gemein arithmetischen Zahl gemäfs ist, dafs sie mit ihrer Einheit, als dem allgemeinen Zahlelemente ihren Anfang nimmt: so wird das Vollgrofs einer jeden solchen Zahl (um mich kurz auszudrücken) nur eine nachewige Zahl seyn müssen, welche freilich durch keine, noch so weit fortgesetzte Aufzählung jemals abgereicht werden kann *).

§. 41. Wenn aber diese verlangte Ewigkeit, dieses Vollgrofs jeder Zahl durch ∞ von uns angedeutet wird: so haben wir dann, I irgend eine li-

---

*) Die algebraisch arithmetische Maasleiter ist allerdings vor- und nachewig

$$-\infty, \ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots +\infty$$

und mufs bei der ersten arithmetischen Operation, dem Numeriren, dem arithmetischen Abmessen, als solche angelegt werden. - (Man s. meine Algebraische Auflösung etc., Freyberg 1808.) Bei den nachfolgenden arithmetischen Operationen aber mufs sie, wegen der Verbindung mit der gemeinen Arithmetik, gleichsam in ihre bejahte, und ihre verneinte Ewigkeit zertheilt gedacht werden. Und da hiemit in dem verneinten Theile, dessen Ende zum Anfang gemacht wird: so entsteht dadurch das plötzlich scheinende Ueberspringen in der A tang 90°, einmal dieselbe als letzte Tangente der spitzen, und einmal, als erste Tangente der stumpfen Winkel gedacht.

neäre Einheit bedeutend, $\frac{1}{\infty}$ als einen aithmeti-schen Ausdruck des Euklidischen Punctes gewonnen; indefs dagegen $\frac{1}{\propto}$, der beständig wachsenden Zahl $\propto$ ungeachtet, immerfort noch eine Linie, obgleich eine immerfort kleinere und kleinere Linie, oder doch noch mehre Euklidische Puncte aneinander liegend, bedeutend seyn mufs.

§. 42. Indem wir dann schreiben können, dafs jede Linie A als $= \frac{A}{1} . 1$ betrachtet, eine $\frac{A}{1}$ malige Linie 1 ist: so haben wir auch, dafs $\frac{A}{1} . \infty$ die $\frac{A}{1}$ mal ewige Anzahl der Puncte bedeuten mufs, aus welchen die Linie A, und eben so $\frac{B}{1} . \infty$ die $\frac{B}{1}$ mal ewige Anzahl der Puncte seyn mufs, aus welchen die Linie B bestehend gedacht werden mufs; in beiden Ausdrücken, die ∞ eine und eben dieselbe ewige Zahl bedeutend, weil sie ja die ewige Anzahl der Puncte in der, zum gemeinschaftlichen Maafsstabe angenommenen linearen Einheit 1, bedeutend seyn soll.

§. 43. Ueber die Gröfse der Einheit 1 braucht ein weiteres nicht bestimmt zu seyn, als dafs sie eine endliche zur Einheit gewählte oder gegebne Linie seyn mufs, um die Verhältnisse mehrer endlichen Linien arithmetisch auszudrücken. Indem nämlich bei der Messung zweier Linien einerlei lineäre Einheit allemal vorausgesetzt wird: so weifs man, dafs die ewige Anzahl der Puncte in A, zu der ewigen Anzahl der Puncte in B,

$= \frac{A}{1} \infty . \frac{1}{\infty} : \frac{B}{1} \infty . \frac{1}{\infty}$, folglich $=$ A:B seyn mufs.

§. 44. Wenn das Verhältnifs zweier Linien A und B durch zwei Zahlen $n = \frac{A}{I}$ und $m = \frac{B}{I}$ angeblich seyn soll: so mufs die eine Linie A einen aliquoten nten Theil haben, welcher irgend einem aliquoten mten Theile der andern Linie B an Länge völlig gleich ist, und daher zur gemeinschaftlichen lineären Einheit I kann angenommen werden. Aber selbst auch für so manche solche Linie, welche in dem Calcul als einzeln gesucht oder gegeben erscheint, z. B. für die obige Linie BE in §. 33, welche für den Calcul als eine $x . I = (\sqrt{12}) . I$ betrachtet wird, kann es nun einmal, wegen des wesentlichen Unterschiedes zwischen diskreter Zahlgröfse und stetiger Liniengröfse, irgend einen aliquoten Theil einer lineären Einheit I nicht geben, durch welchen man die Linie BE genau zu messen vermöchte.

§. 45. Da es gleichwol für uns, die wir ein ungleich besser klassificirtes Zahlensystem, als die alten Griechen und Römer besitzen, ein unbestrittenes Bedürfnifs, eine bewundernswürdige Hülfe geworden ist, die Abgleichungen, namentlich für die stetigen Dimensionen der Geometrie, und für die stetigen Zeitverläufe in der Mechanik, durch calculatorische Ausdrücke nach Möglichkeit abzureichen, auch wo dergleichen ganz genau nicht möglich ist, doch durch irgend ein arithmetisches Zeichen, die verlangte Abreichung anzudeuten; und wir eben defshalb selbst auch schon in der niedern Mathematik z. B. durch das Zeichen $\sqrt{}$ im obigen $BE = x . I = (\sqrt{12}) . I$, die geforderte Abreichung, ob sie gleich genau nicht möglich ist, doch anzudeuten uns erlauben müssen; warum sollen wir Bedenken tragen, es einzugestehen, dafs der höhere Calcul, z. B. auf die stetigen

Linien der Geometrie angewandt, wenn er strenge, und seiner wesentlichen Absicht gemäfs sich ausdrücken soll, eine Abmessung der Euklidischen Linien durch Euklidische Puncte fordern mufs; auch in der calculatorischen Mechanik, wenn sie neben der calculatorischen Statik mit Consequenz und Strenge bestehen soll, jeder Zeitverlauf in der Mechanik durch dessen statischen Anfang, als sein untheilbares Element (Augenblick, oder besser noch Zeitpunct genannt), als calculatorisch gemessen gefordert, mufs ausgedrückt werden können.

§. 46. Stetige Gröfsen so klassificirt zu denken, dafs sie durch ein diskretes Zahlsystem abgereicht werden können, setzt eine äufserst unvollkommene Classificirung voraus, das ist nicht zu läugnen. Aber die meisten Classificirungen, deren man sich zur Systematisirung der Wissenschaften bedient, sind ja so unvollkommen, dafs man der wahren Einsicht in die Wissenschaft dadurch schädlich werden würde, wenn man die Mängel ihrer Classificirung nicht anerkennen wollte, sobald sie sich entdecken lassen.

Wir indessen können uns versichert halten, der ganzen Unvollhommenheit in unserm $\frac{1}{\infty}$, als calculatorischem Ausdrucke des Euklidischen Punctes, durchaus uns bewufst zu seyn, da wir für alle lineäre Einheiten 1 nur einerlei Zeichen ∞ eben defshalb zu schreiben verlangen, weil wir für keine dieser endlichen Einheiten etwas mehres von diesem Zeichen zu sagen uns anmafsen wollen, als dafs es jedesmal irgend eine von den unendlich vielen, unaufzählbar grofsen, ewigen Zahlen bedeuten solle.

§. 47. Eben defshalb, weil wir uns dieser unendlichen Unbestimmtheit des ∞ in der calculatori-

schen Gleichung $\frac{1}{\infty}$ = einem Puncte, völlig bewufst sind: so werden wir vermöge derselben z. B. das oben §. 39. schon bezielte Verhältnifs, dafs jedes Tangenten-Vollgrofs $A \cdot \text{tang}\, 90^\circ = \frac{A}{1} \cdot \infty \cdot A$ seyn mufs, mit völliger Bündigkeit und Deutlichkeit, und zugleich mit völliger Anschaulichkeit der Quadrirung $A \cdot \text{tang}\, 90^\circ \cdot A \cos 90^\circ = AA$, wirklich darstellen können; wie folget.

§. 48. Da die Rechteche $A \,\text{tang}\, \varphi \cdot A \cos \varphi$, so lange noch der Bogen φ dem Quadranten $\frac{\pi}{4}$ = 90 Gradbogen (also der Winkel φ dem rechten Winkel = 90 Gradwinkel) sich nähernd gedacht wird, immerfort $= A \cdot \infty \cdot A \frac{1}{\infty}$ seyn müssen: so mufs es wegen der gleichzeitigen Gleichheit dieser beiden immerfort gröfser werdenden Zahlen ∞ (Vorerinner. VII. §. 12), und wegen der stetig möglichen Vergröfserung des φ, bis zum $\varphi = 90$ Grad hin, allerdings sogleich als deutlich erwiesen anerkannt werden, dafs auch

$A \cdot \text{tang}\, 90^\circ \cdot A \cos 90^\circ = AA$ geblieben seyn mufs.

Eben so gewifs aber ist es, dafs durch diese Schlüsse nur die Flächengröfse des $A \cdot \text{tang}\, 90^\circ \cdot A \cos 90^\circ$ genau gefunden ist; die daraus folgende lineäre Gröfse aber,

$$A \cdot \text{tang}\, 90^\circ = \frac{A \cdot A}{A \cdot \cos 90^\circ} = \frac{A \cdot A}{A \cdot 0} = \frac{A}{0} = A \cdot \infty$$

durch den Ausdruck $A \cdot \infty$ viel zu wenig bestimmt wird, als dafs er uns eine deutliche Anschauung gewähren könnte, warum die unendlich lange Tangentenlinie $A \cdot \infty$, welche als solche irgend einige Breite schlechterdings nicht haben mufs, geradē ganz

genau hinreichend geblieben sey, um der Gleichung $=$ AA fernerhin Genüge zu thun?

§. 49. Ich selbst würde auf diese Frage ehemals erwiedert haben, dafs man auf eine ungereimte Frage keine Antwort zu geben brauche. Nachdem ich aber durch mein Studium der höheren Mechanik, und namentlich durch den dabei mir aufgefundenen scharfen Begriff von Geschwindigkeit, es eingesehen hatte, wie man vermittelst der Infinitesimalrechnung mit völliger Schärfe nur dann zu schliefsen vermöge, wenn man die Differentialen der vollkommenen Verschwindung der stetigen Gröfsen, nicht aber der unvollkommenen Verschwindung diskreter Zahlgröfsen unterworfen gefordert habe: so war mir nun durch mein $'dx = dx = o$ geworden, und durch die genaue Bestimmung, dafs, x° eine der Gröfse x gleichartige Einheit andeutend, jede Urbelegung $dx = \frac{x^\circ}{\infty} = \frac{1}{\infty}$ seyn müsse, auch $\frac{x^\circ}{\infty}$ als der calculatorische Ausdruck des Punctes, des untheilbaren Elementes der Linie x, gewonnen, und dadurch die deutliche Beantwortung solcher Fragen in die Hände gegeben, bei welchen man die Lehren der Euklidischen Geometrie auch calculatorisch strenge mufs anzudeuten wissen.

§. 50. Wenn wir mit diesem Bedürfnisse dem sonst gewöhnlichen Ausdruck $A . \cos 90^\circ = \frac{A}{\infty}$, vergleichen: so erhellet sogleich, dafs er nicht genau genug ist; weil ja für einen unendlich grofsen Halbmesser $A = U$, der Cosinus $\frac{U}{\infty}$ noch eine endliche Linie seyn würde!

Schlechterdings müssen wir hier der Euklidischen Geometrie gemäfs fordern, dafs der $A . \cos 90^\circ$

bis auf einen **einzigen** Euklidischen Punct eingeschwunden seyn mufs, der Halbmesser A mag noch so klein, oder noch so grofs, selbst auch unendlich grofs, und unendliche Mal unendlich grofs seyn.

Dieses festgehalten, und die Bedeutung des ∞ dahin bestimmt, dafs durch $\frac{1}{\infty}$ ein einziger, einzelner Euklidischer Punct angedeutet werde, die endliche lineäre Einheit mag seyn, welche sie will, dann haben wir die calculatorischen Ausdrücke, dafs

$$A \,.\, \cos 90^\circ = \frac{A}{A} \,.\, \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty},$$

$$\text{und } U \,.\, \cos 90^\circ = \frac{U}{U} \,.\, \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \text{ ist.}$$

§. 51. Wenn wir nun ferner bedenken, dafs jede Linie $A = \frac{A}{1} \infty \,.\, \frac{1}{\infty}$ seyn mufs, nämlich $\frac{A}{1} \,.\, \infty$ die Anzahl der Puncte in der Linie A seyn mufs, und wir dann aus der

Proportion $A \,.\, \cos 90^\circ : A = A : A \tan 90^\circ$

auf $A . \text{tang}\, 90^\circ = \frac{A A}{A \cos 90^\circ}$ geschlossen haben: so wissen wir dann auch

dafs $A . \text{tang}\, 90^\circ = \frac{A A}{1 : \infty} = \frac{A . A}{1} \,.\, \infty$ seyn mufs,

also $\frac{A}{1} \,.\, \infty$, als die Anzahl der in A tang 90° enthaltenen Linien A, gerade eben dieselbe seyn mufs, welche auch die Anzahl der Puncte in dem Halbmesser A ausmacht. Ob nun gleich diese Anzahl eine $\frac{A}{1}$ mal ewige, und allemal unerreichbare, unangebliche Zahl ist: so ist uns doch dessen ungeachtet vollkommen einleuchtend geworden, dafs z. B. in einer ver-

ticalen Tangente A. tang 90° gerade so viele Linien A enthalten seyn müssen, daſs sie ganz genau hinreichend sind, um in jedem Puncte eines horizontalen Halbmessers A, eine von jenen unzählbaren vielen A, normal gerichtet angelegt zu denken; durch solche Anlegung aber die sämmtlichen A in der Tangente, nicht nur ihrer Anzahl nach, sondern auch ihrer Richtung nach, auf das genaueste verbraucht sind, und der Flächenraum des Ausdruckes A. A auf das völligste, vollkommen stetig damit ausgefüllt seyn muſs.

§. 52. Der Punct ist das untheilbare Element der Linie, die Linie ist das untheilbare Element der Fläche, die Fläche ist das untheilbare Element des sogenannten geometrischen Körpers; und so ist es sehr leicht einzusehen, daſs man fernerhin jedes Ur- und jedes Folge-Differential zur calculatorischen Null geworden haben muſs, wenn man auch bei Integrirung körperlicher Räume mit strenger Bündigkeit geschlossen haben will. Wer diese völlige Strenge durch geometrische Anschaulichkeit der Function von zwei und drei Dimensionen kennen gelernt hat, wird sicherlich davon nicht nachlassen wollen, wo er bei Functionen von noch mehren (ganz oder gebrochen aufgezählten) Dimensionen ebenfalls die Differential- und Integral-Methode zu benutzen hat; daher ich nicht für nöthig halte, davon Gebrauch zu machen, daſs wir auch jede von den drei geometrischen Dimensionen uns intensiv vergröſsert, die Linie zur Fläche, die Fläche zum Körper erhoben uns vorstellen können. Allerdings auch den Punct zur Linie erhoben; und alles dieses mit Beibehaltung des Urelementes, des Euklidischen Punctes. Dieses zugestanden, würde selbst auch $X = x^{\frac{m}{n}}$ durch geometrische Anschaulichkeit sich abreichen lassen, weil

ja das einzele $x^{\frac{1}{n}}$, als eine stetige Gröfse, durch eine Linie dargestellt werden könnte.

Aber weit entfernt, auf solche allzu mühsame Darstellungen Zeit und Raum hier verwenden zu wollen, habe ich vielmehr, selbst auch eine umständliche Darstellung des körperlichen Integrirens nicht einmal für nöthig gehalten, nachdem ich die Integrirung der Fläche vollständig erörtert hatte.

§. 53. Man pflegt gewöhnlich zu erinnern, dafs die Vorstellung, als ob das Integral eine Summe der Differentiale ausmache, nur für einige, nicht für alle Fälle zutreffend sey; daher man sich an die richtigere Definition halten müsse, dafs das Integral eines Differentiales in einer solchen Function bestehen müsse, welche differenziirt, das vorgegebne Differential geben würde. Ich habe diese Definition die calculatorische genannt. Was die dimensorische betrifft, so würde sie, wenn man die Differentialien völlig $= 0$ werden zu lassen, sich nicht entschliefsen will, wirklich nur in denen Fällen völlig zutreffend bleiben, in welchen sie auch für endliche Differentiale richtig wäre; z. B. bei der Quadrirung eines Rechteckes, bei der Kubirung eines rechtwinkligen Parallelepipedi, auch eines Cylinders und Kegels, wenn man die Kreislinie hinreichend rectificirt gefordert hat; kurz in allen solchen Fällen, in welchen man durch die Euklidische Geometrie, ohne alle Differential- und Integral-Methode, zu quadriren und zu kubiren schon vermag.

§. 54. Wenn man aber die Differentialien auf das völligste sich hat vernullen lassen, so dafs $\frac{dX}{dx} = \frac{O}{o} = y$, in völligster Strenge eine dimensorische Endgränze des X (also falls X eine Fläche ist,

y eine **Linie**, falls X ein Körper ist, y eine Fläche) ausmacht; dann mufs es auch aufs völligste und ganz allgemein seine Richtigkeit haben, dafs das Integrand $\int dX$ in einem Aggregate (einer algebraischen Summe) unendlich vieler stetig an einander liegenden Endgränzen $\frac{dX}{dx} = y$ bestehen mufs. Und wer sich die Mühe gegeben hat, die sämmtlichen Darstellungen und Erörterungen dieses Kapitels, bis hieher, mit der gehörigen Achtsamkeit zu durchlesen, der wird nun auch die folgenden kurz gefafsten Resultate derselben richtig und deutlich finden.

§. 55. 1) Jedes $X + C$ ist $= \overset{1\ldots(\infty)}{\mathfrak{S}} \frac{dX}{dx} = \overset{1\ldots(\infty)}{\mathfrak{S}}\, y$, indem $\overset{1\ldots(\infty)}{\mathfrak{S}}\, y$ das Aggregat der **sämmtlichen** dimensorischen Endgränzen in der gesuchten Function $X + C$ bedeutet, und daher (x^0 eine, der stetigen Gröfse x gleichartige Einheit, und $\frac{x^0}{\infty}$ ein einzeles untheilbares Element dieser Einheit bedeutend) durch (∞) entweder

$$\frac{-a+x}{x^0}\infty\cdot\frac{x^0}{\infty},\ \text{oder}\ \frac{x}{x^0}\infty\cdot\frac{x^0}{\infty},\ \text{oder}\ \frac{+a+x}{x^0}\infty\cdot\frac{x^0}{\infty},$$

also die unendlich grofse Anzahl der sämmtlichen untheilbaren Elemente entweder in der Gröfse $-a+x$, oder in der x, oder in der $+a+x$ bedeutet; je nachdem die gesuchte Function $X + C$ mit $x = a$, oder mit $x = o$, oder mit $x = -a$ ihren **Anfang** nehmend seyn soll.

§. 56. Auch ist es eben so richtig

2) dafs jedes $X + C = \overset{1\ldots(\infty)}{\mathfrak{S}}\, dX = \overset{1\ldots(\infty)}{\mathfrak{S}}\, y\, dx$ seyn mufs.

Um davon in der Kürze, und anschaulich zu überzeugen, will ich benutzen, dafs man jede stetige Gröfse x, als solche, durch eine stetige Linie dargestellt fordern kann. Dann liegt es vor Augen, dafs unser Functionsdifferential $dX = y dx$, aus einem $y'dx$ dadurch gefolgert wird, dafs wir die Linie 'dx immerfort kleiner und kleiner werdend nicht nur, sondern dabei auch bis zu einem einzigen Puncte dx einschwindend gefordert haben; also, Falls y eine Linie war, auch aus den Parallelogrammen $y'dx$ ein Parallelogramm $y.dx = y.\frac{1}{\infty}$, das heifst, ein Parallelogramm, dessen Breite nur noch in einem einzigen Euklidischen Puncte besteht, also eine Linie y geworden seyn mufs;

auch Falls y eine ebne Fläche war, aus dem Prisma $y.'dx$ ein Prisma $y.dx = y.\frac{1}{\infty}$, das heifst, ein Prisma, dessen Dicke bis auf einen einzigen Euklidischen Punct eingeschwunden ist, also eine Fläche y geworden seyn mufs.

Obgleich es uns nun eben dadurch wiederum gewifs geworden ist, dafs (∞) als die Anzahl der sämmtlichen $y dx$ in dem verlangten $X + C$, gerade eben dieselbe unendlich grofse Anzahl seyn mufs, welche die Anzahl der sämmtlichen untheilbaren Elemente, jedes $= \frac{x^0}{\infty}$, entweder in der stetigen Gröfse $-a+x$, oder $o+x$, der $+a+x$ enthalten seyn mufs: so würde uns doch dieses die Gröfse $X + C$ durch endliche gleichartige Gröfsen (z. B. eine Fläche $X + C$ durch Quadrate, die körperliche Raumgröfse $X + C$ durch Würfel) anzugeben, nur verhelfen können, wenn wir die mittlere Gröfse der sämmtlichen y anzugeben wüfsten; wie z. B. die $\dot{y}$ in §. 29. und §. 30.

§. 57. Ungleich öfter kann es uns gelingen, nachdem wir $\frac{dX}{dx} = y = \mathfrak{X}$ erhalten, nämlich die dimensorische Endgränze y als eine Function des x ausgedrückt haben, vermöge der dritten Gleichung, dafs nämlich

3) auch jedes $X + C = \int y\,dx + C = \int \mathfrak{X}\,dx + C$

seyn mufs, aus der Form des Differentiales $\mathfrak{X}dx$ auf die Form des X zu schliefsen; wobei ein treues Gedächtnifs den Verstand vertreten kann, wie es aus so manchem Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung am Tage liegt; des so genannten Functionen-Calculs zu geschweigen.

§. 58. Der grofse Euler, dessen Namen wir alle mit Dank und Ehrerbietung zu nennen haben, besafs vielleicht das treueste und zuverlässigste Formelngedächtnifs unter allen, die als Erfinder und Bahnbrecher in der höhern Analyse aufgetreten sind; und mit seinem vielumfassenden Verstande war zugleich die aufrichtigste Wahrheitsliebe verbunden. Dennoch scheint es fast, als ob er die wichtige Ueberzeugung, dafs das wahre Functionsdifferential, wie es für treffende Anlegung des höhern Calculs auf die Geometrie, und auf die Wissenschaften der angewandten Mathematik, nothwendig ist, auch calculatorisch strenge und genau nur durch ein $\eth x = dx = 0$ geworden, zu finden sey, mehr durch calculatorische Erfahrung und Ueberschauung, als durch einen völlig scharfen und bestimmten Begriff des $dx = 0$ sich erlangt habe; denn bei seinen Anlagen des Calculs auf angewandte Mathematik, fehlt es ja oft an einem deutlichen Begriffe der sächlichen Infinitesimale.

§. 59. Da es in einem Lehrbuche der Differentialrechnung für Anfänger, hauptsächlich darauf ankommt, den calculatorischen Mechanismus für die

Auffindung des Functionsdifferentials vermittelst des Urdifferentiales bündig zu erweisen, und man dabei meines Erachtens sehr gut und rathsam festsetzen kann, daſs $dX = y\,dx$ das völlig genaue Functionsdifferential heiſsen soll, wenn $\frac{dX}{dx} = y$ der genaue Differentialquotient ist; dieser aber offenbar seinen genau bestimmten Werth erhält, wenn man in dem dafür sich ergebenden Ausdrucke, jedes darin übrig gebliebne dx, als einen zu $= 0$ gewordenen Factor betrachtet: so wäre auch mir in meinem Systeme der Differentialrechnung ein mehres über dieses $dx = 0$ geworden, zu sagen nicht nothwendig gewesen, als daſs mit $dx = 0$, auch $dX = 0$ geworden seyn müsse, und daher der genaue Werth des Differentialquotienten als ein $y = \frac{dX}{dx} = \frac{0}{0}$ zu betrachten sey. Indessen schien es mir immerhin nützlich, weil ich meine Zuhörer mehr zum Denken als zum Rechnen zu gewöhnen suche, vorläufig darzulegen, daſs ein Flächendifferential $dX = y\,dx = y \cdot 0$, als Fläche allerdings $= 0$ seyn, dabei aber doch eine Linie, und zwar eine dem jedesmaligen Endpuncte des veränderlichen x zugehörige Endgränze der veränderlichen Fläche X seyn müsse.

§. 60. Da es nun aber in der Integralrechnung darauf ankommt, entweder aus den Endgränzen y auf die Fläche X, oder aus dem Flächendifferentiale $dX = y\,dx$ auf die Fläche X zu schlieſsen, zu jenem Schlieſsen aber $\dot{y}$, als die mittlere Gröſse der sämmtlichen y erforderlich ist, die sich nur selten geradezu finden läſst: so muſs nun bei der zweiten Art zu schlieſsen, allerdings die Frage entstehen, wie aus noch so vielem Flächen-Nichts ein endliches Flächen-Etwas sich anschaulich ergeben

könne! (Denn wie es durch calculatorischen Mechanismus gefunden werde, ist im vorigen Kapitel gelehrt.)

§. 61. Nachdem uns hier für das werdende Flächen-Differential $'dX = 'y\,'dx$, zwei einander normale Linien $'y$ und $'dx$ angenommen, Euklids Definition des Punctes, auf das anschaulichste überzeugt hat, daſs im genauen Flächen-Differential $dX = y\,dx$, das genaue Linien-Differential dx, zum untheilbaren Elemente der Linie geworden seyn muſs; so sind wir dadurch für jede andere stetige Gröſse x, sie mag Fläche, oder Körper, oder Zeitverlauf u. s. w. seyn, ebenfalls gewiſs geworden, daſs ihr genaues Differential dx in dem untheilbaren Elemente der stetigen Gröſse x bestehen muſs.

§. 62. So gewiſs es nun aber ist, daſs $\frac{x}{\infty}$ geschrieben, und dessen Divisor ∞, eine unendlich groſse, ewige Zahl bedeutend, einen so richtigen calculatorischen Ausdruck des untheilbaren x-Elementes ausmacht, als man dergleichen anzugeben vermag, weil sich ja über die Gröſse der ewigen Zahl ∞ nichts bestimmen läſst: eben so gewiſs ist es, daſs wir für die Differential- und Integralrechnung unrichtig und fehlerhaft verfahren würden, wenn wir das Differential $dx = \frac{x}{\infty}$ ansetzen wollten.

Denn in der Differentialrechnung soll ja namentlich das constante dx, bei allen noch so veränderlichen Werthen des x, immerfort einerlei bleibend seyn, müſste daher dem calculatorischen Ausdrucke $dx = \frac{x}{\infty}$ ein ∞ aufgebürdet werden, welches dem x umgekehrt proportional wäre, wie es doch mit

der (in Diff. R. VII. als nothwendig erwiesenen) gleichzeitigen Gleichheit der ∞, folglich auch der ∞, sich nicht verträgt.

In der Integralrechnung aber muſs man allemal in dem Ausdrucke eines $\int dX$, aus welchem man auf X schlieſsen will, entweder mehre ∞ schon aufgeführt, oder doch neben dem einen aufgeführten, wenigstens ein zweites, dem ersten gleichbedeutendes, zur Hand haben; weil man ja aus einer durch unendlich, unerreichbar groſse Zahlen ausgedrückten Gröſse, nur vermittelst anderer, eben so unerreichbar groſsen Zahlen, auf ein endliches Resultat gelangen kann.

§. 63. Daher ist es nun für den gesammten Infinitesimalcalcul nothwendig, anzunehmen, daſs, x^0 eine der stetigen Gröſse x gleichartige Einheit bedeutend, allemal $dx = \frac{x^0}{\infty}$ gesetzt, allemal dx durch dieses $\frac{x^0}{\infty}$ calculatorisch ausgedrückt geachtet, und durch dieses untheilbare Element der Einheit x^0 auch das untheilbare Element der Gröſse x angegeben werde.

Dann haben wir vollkommen bündig, daſs jedes $x = \frac{x}{x^0} \infty . \frac{x^0}{\infty}$, nämlich $\frac{x}{x^0} \infty$ die unendlich groſse Anzahl der untheilbaren Elemente im x bedeutend, eben deſshalb seyn muſs, weil ja dieses ∞ allemal die unendlich groſse Anzahl der untheilbaren Elemente in der Einheit x^0 bedeuten soll, die angenommene Einheit x^0 mag so groſs oder so klein seyn, als sie will. Daſs sie nicht für alle, sondern nur für sehr wenige, unendlich wenige, von den sämmtlichen einzelen Werthen des stetigen x, ein aliquoter Theil würde seyn können, thut unsern Schlüssen

keinen Eintrag; weil wir ja bei allen diesen Schlüssen vermittelst des calculatorischen Ausdruckes $\frac{x^0}{\infty}$, auch calculatorisch durch dieses einzele untheilbare Element zu messen verlangen.

§. 64. Wie nun aber, wenn x keine stetige Gröſse ist? Ich erwiedere, daſs für diskrete Gröſsen, an und für sich betrachtet, kein Infinitesimal-Calcul brauchte erfunden zu werden. Wenn man aber dergleichen diskrete, das heiſst, durch die unvollkommene Klassification eines Zahlsystemes uns zugezählte Gröſsen, mit stetigen Gröſsen zu verbinden hat: so ist es einleuchtend, daſs man gerade nur den feineren Maaſsstab der stetigen Gröſsen für beide gebraucht fordern muſs. Und selbst auch, wenn man Resultate aus lauter diskreten Gröſsen, vermittelst der kürzeren, weniger mühseligen, und eben deſshalb zuverlässigeren, leichter durchschaubaren Methode des Infinitesimal-Calculs, zu finden wünscht: so muſs man die diskreten Gröſsen zur stetigen Vollkommenheit zu erheben, und dann die diskreten Resultate nachher abzusondern suchen. Eine Benutzung dieses Gedankens wird in einem der letzten Kapitel, die Summirung der Reihen betreffend, vorkommen.

Viertes Capitel.

Einige logarithmische und trigonometrische Functionen vermittelst des algebraischen Integrirens in Reihen auszudrücken.

§. 1. Da $d\log(1+x) = \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{1+x} \cdot dx$ ist, und $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \ldots\ldots$ etwa durch algebraische Division, oder auch als $(1+x)^{-1}$ durch die Binomialreihe gefunden wird; so hat man auch $d\log(1+x) = 1\,dx - x\,dx + x^2\,dx - x^3\,dx + - \ldots$

also $\int d\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots\ldots$

also $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots C$

Da nun für den einzelen Werthfall $x = 0$ $\log(1+0) = \log 1 = 0$ ist, so muſs auch $C = 0$ seyn.

Demnach $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots\ldots$

Eben so $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - - \ldots$

folglich $\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right\}$;

aus welcher Reihe sich (m. s. Diff. R. X. §. 36.) auch die folgende ergibt:

$$\log u = 2\left\{\frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^7 + \ldots\right.$$

§. 2. Diese letzte Reihe gibt für jede bejahte Zahl u eine Reihe, die von ihrem ersten Anfange an

Glieder convergent ist, für jede bejahte Zahl u, also für jede Zahl, welche einen möglichen Logarithmen haben kann.

In der vorletzten Reihe für $\log(1-x)$ kann x höchstens $= 1$ seyn, wenn der Logarithme nicht unmöglich werden soll.

Für $x = 1$ erhält man

$$\log(1-x) = \log 0 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots.$$

also ein verneintes Unendliches, dem wir späterhin bei Summirung dieser Reihe, in einem der letzten Kapitel, noch eine merkwürdige Bestimmung hinzufügen werden.

Wo es um bequeme Berechnung einzeler Logarithmen, oder sogar hinreichend vollständiger Logarithmentafeln zu thun ist, wird man noch mancherlei andere Reihen in Gebrauch zu nehmen haben. Für uns aber dürfte nur die folgende noch zu beachten nöthig seyn; in welcher statt der 1 im obigen $\log(1+x)$ eine allgemeinere Zahl a gesetzt ist.

§. 3. Da $d\,l(a+x) = \frac{1.dx}{a+x} = \frac{1.dx}{a} - \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} - \frac{x^3dx}{a^4} + - \ldots$

$$\text{also } \int d\,l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + - \ldots + C,$$

für $x = 0$ aber $\log a = 0 - 0 + 0 - 0 \ldots + C$ ist;

so muſs $\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \ldots$ seyn.

Diese Reihe ist nun sehr convergent, wenn a vielmal gröſser als x ist.

Bedürfen wir z. B. des $\log 10003$, welchen die Tafeln nicht mehr angeben, so benutzen wir,

dafs $\log(10000+3)$

$$= 9{,}21034037 + \frac{3}{10000} - \frac{9}{2.10000^2} + \frac{9}{10000^3} -$$

$$= \quad , \quad + 0{,}0003 - 0{,}000000045 + 0{,}000000000009$$

seyn mufs;

wodurch also $\log 10003 = 9{,}210640325$ gefunden wird.

§. 4. Eben so kann

$$\log(a-x) = \log a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - \ldots\ldots$$

benutzt werden, um z. B. $\log 9993$ als $\log(10000-3)$

$$= 9{,}21034037 - \frac{3}{10000} - \frac{9}{2.10000^2} - \frac{9}{10000^3} -$$

$$= \quad , \quad - 0{,}0003 - 0{,}0000000045 - \ldots\ldots\ldots$$

$$= 9{,}21004032 \ldots.$$ zu finden.

§. 5. Da $d \operatorname{arc tang} x = \frac{1}{1+xx} dx$,

also auch $= dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + - \ldots$ ist,

so mufs $\operatorname{arc tang} x = \int dx - \int x^2dx + \int x^4dx - \int x^6dx + \ldots\ldots$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots + C$$ seyn.

Dieses ist nun die in Diff. R. XIII. §. 11. schon vorläufig erwähnte Methode; unter allen die kürzeste, um die Länge des Bogens für die gegebne Tangentenlänge x zu finden. Soll dabei nur von Bogenlängen die Rede seyn, welche mit $x = 0$ ihren Anfang nehmen, so ist die Constante $C = 0$.

§. 6. Dafs diese Reihe für jede Tangente x gröfser als 1 gegeben, divergent, und daher zur unmittelbaren Berechnung aller Bogen im ersten Quadranten, die gröfser als 45 Grad sind, unbrauchbar ist, liegt vor Augen. Mehr darüber habe ich schon in der Differentialrechnung, a. a. O. §. 12 — §. 18, bei-

gebracht, und noch Mehres in einem Aufsatze über ein *Mémoire* des Hrn. Poinsot, Isis 1825. Heft IV. Seite 394.

§. 7. Da $d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = (1-xx)^{-\frac{1}{2}} dx$ ist (Diff. R. §. 25.),

also $\arcsin x = \int (1-xx)^{-\frac{1}{2}} dx$ seyn mufs; und wir dieses Integrand vermittelst des Binomialtheoremes, durch lauter solche Glieder auszudrücken wissen, welche einzeln algebraisch integrirbar sind: so kann auch auf völlig ähnliche Weise, wie vorhin für die gegebne Tangentenlänge, eine Reihe gefunden werden, nach welcher man die Bogenlänge berechnen kann, welche einer gegebnen Sinuslänge zugehört.

Aber auf solche Reihen viele Zeit zu verwenden, ist uns nicht nöthig, so rathsam es übrigens war, diese Methode aus dem hier angegebnen Gesichtspuncte dem Anfänger hier vorzutragen.

Fünftes Capitel.

Welche $(a+bx^n)^p x^m dx$ (*I.* §. 35.) *sich vermittelst der algebraischen Integrirungsregel* $\int X^p dX = \frac{X^{p+1}}{p+1} + C$ *genau integriren lassen.*

§. 1. Wenn $m = n - 1$ gegeben ist, so hat man lediglich der in I. §. 27. schon erwähnten Hülfe eines constanten Factors, hier des nb nöthig, um einzusehen, daſs

$$\int (a+bx^n)^p x^{n-1} dx \text{ als } = \frac{1}{nb} \int (a+bx^n)^p . nbx^{n-1} dx$$

der algebraischen zweiten Integrirungsregel (I. §. 21.) unterworfen, sich $= \frac{1}{nb} . \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{p+1} + C$ ergeben muſs bei jedem p. Und obgleich, falls $p = -1$ gegeben wäre, dieses vermittelst der algebraischen Integrirungsregel gefundene

$= \frac{1}{nb} . \frac{(a+bx^n)^0}{0} = \frac{1}{nb} \log (a+bx^n)$ seyn würde (I. §. 21.), also meistens nur näherungsweise angeblich wäre: so kann doch dieses vermittelst der schon berechneten logarithmischen Tafeln mit aller irgend erforderlichen Genauigkeit so leicht geschehen, daſs man auch in diesem Falle das Integral für genau schon gefunden anerkennt.

§. 2. Nun kann die Frage entstehen, ob nicht bei einigen, anders als $m = n - 1$ gegebenen m und n, gleichwohl durch die Mitwirkung einiger p, das vorgegebene Integrand ebenfalls der algebraischen Integrirungsregel unterworfen seyn könne! Um die-

se p zu finden, müssen wir bedenken, daſs

II) jedes $\int(a+bx^n)^p . x^m dx$

$$\text{auch} = -\frac{1}{na}\int(ax^{-n}+b)^p - (nax^{m+np}\,dx),$$

also der Form $\int X^p . dX$ unterworfen,

und daher $= -\frac{1}{na}.\frac{(ax^{-n}+b)^{p+1}}{p+1} + C$ seyn muſs, wenn $m+np = -n-1$, also $m+1+(p+1)n = 0$, also $m = -(p+1)n - 1$ gegeben ist, und sonst nicht.

§. 3. Nur unter diesen beiden Bedingungen, daſs entweder I) $m = n-1$ oder II) $m = -(p+1)n-1$ gegeben sey, kann ein vorgegebenes Integrand $\int(a+bx^n)^p . x^m dx$ der algebraischen Integrirungsregel $\int X^p dX$ mit einem Male unterworfen, und so geradezu genau integrirt werden. Denn obgleich auch bei gegebnem $p = 0$ das Integral allemal ganz genau $= \int 1 . x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ seyn muſs: so liegt doch eben dadurch auch vor Augen, daſs bei $p = 1$ das Integral allemal $= \int ax^m dx + \int bx^{n+m} dx$ $= \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+m+1}}{n+m+1}$ seyn muſs; und so wird es doch, so lange man $(a+bx^n)^1$ als einen, dem $(a+bx^n)^p$ zugehörigen Fall mit gebundener Stammgröſse betrachtet, immerhin der gleichfolgenden Reihenentwickelung unterworfen bleiben.

§. 4. Wenn nämlich p irgend eine bejahte ganze Zahl ist: so erhalten wir nach der bekannten Binomialreihe:

$$(a+bx^n)^p = a^p + pa^{p-1}bx^n + \frac{p.p-1.}{1.2}a^{p-2}b^2x^{2n}$$
$$+ \frac{p.p-1.p-2.}{1.2.3}a^{p-3}b^3x^{3n}.....$$

III) also $\int(a+bx^n)^p x^m dx$

$$= \int a^p x^m dx + \int p \, . \, a^{p-1} b x^{n+m} dx + \int \frac{p.p-1}{1.2} . a^{p-2} b^2 x^{2n+m} dx$$

$$+ \int \frac{p.p-1.p-2.}{1.2.3} a^{p-3} b^3 x^{3n+m} dx + \ldots$$

$$= \frac{a^p . x^{m+1}}{m+1} + \frac{p.a^{p-1} b x^{n+m+1}}{n+m+1} + \frac{p.p-1}{1.2} . \frac{a^{p-2} b^2 . x^{2n+m+1}}{2n+m+1}$$

$$+ \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3} . \frac{a^{p-3} b^3 . x^{3n+m+1}}{3n+m+1} + \ldots,$$

nicht nur bei jedem p, in den einzelen Gliedern durch die Regel I, §. 12. genau integrirt, sondern es mufs auch diese Reihe mit ihrem $(r-1)$ten Gliede schon beendigt seyn, wenn $r = p$ geworden ist, und daher schon das nächstfolgende Glied

$$\frac{p.p-1 \ldots\ldots p-(r-1).p-r.}{1.2 \ldots\ldots r.r+1} a^{p-(r+1)} . \frac{b^r x^{rn+m+1}}{rn+m+1}, \text{ wegen}$$

des Factors $p - r = 0$, wegfallend seyn mufs.

Mag immerhin in irgend einem Gliede der veränderliche Factor sich als $\frac{x^0}{0}$ ergeben, und daher statt dessen $\log x$ anzusetzen seyn: so wird gleichwohl das Integral genau genannt, weil es in einer bestimmten Anzahl integrirter Glieder besteht. Denn obgleich $\log x$, für die allermeisten Werthe des x, anders, als näherungsweise, am bequemsten also durch convergirende unendliche Reihen, nicht zu finden ist: so werden doch diese als schon berechnet in den Tafeln durch eine einzige Zahl mit Decimalbrüchen hinreichend genau angegeben.

§. 5. Wenn nun aber ein vorgegebenes $(a+bx^n)^p x^m dx$, unmittelbar nicht nach I) oder II), und vermittelst der Binomialreihe nach III) genau integrabel deshalb nicht ist, weil p keine ganze bejahte Zahl ausmacht: so entsteht die Frage, ob es

vielleicht nicht für einige n, p und m noch abbrechende Reihen geben möchte; und welche n und und p und m dazu erfordert werden! Allemal wird, wo dieses noch ungewiſs ist, das vorgegebene Integrand der Form $\int X^p d\mathfrak{X}$ dergestalt unterworfen seyn, daſs $d\mathfrak{X}$ ein $= \mathfrak{x} dX$, nämlich nicht etwa durch einen constanten Factor, sondern durch einen mit X veränderlichen Factor, vom dX verschieden ist.

§. 6. In dieser Hinsicht wollen wir zuvörderst die Form $(a+bx)^p x\,dx$ vornehmen. Ihre Integrirung ist der Fundamentalregel nicht unterworfen, weil der freie Factor $x\,dx$ vom $b.1.dx$, dem Differential der Stammgröſse, nicht bloſs wegen des constanten Factors b (welcher sich leicht fortschaffen lieſse), sondern auch durch den veränderlichen Factor x verschieden ist. Der ganze Anstoſs ist gehoben, wenn man statt dieses äuſsern x das ihm gleichgültige $\frac{a+bx}{b} - \frac{a}{b}$ schreibt. Denn dadurch wird

$$(a+bx)^p x\,dx = (a+bx)^p.\left(\frac{a+bx}{b} - \frac{a}{b}\right) dx$$

$$= \frac{1}{b}(a+bx)^{p+1} dx - \frac{a}{b}(a+bx)^p dx,$$

also $\int(a+bx)^p x\,dx = \frac{1}{bb}.\frac{(a+bx)^{p+2}}{p+2} - \frac{a}{bb}.\frac{(a+bx)^{p+1}}{p+1}$, wird also dieses Integral als ein zweigliedriges ganz genau in seinem veränderlichen Theile erhalten; dem sich übrigens ein constantes Glied allemal, sollte es auch $= 0$ seyn, hinzufügen muſs, ob wir gleich das jedesmalige Anmerken desselben von nun an ersparen wollen.

§. 7. Aus dieser letzten Darstellung erhellet, daſs ein Differential der Form $(a+bx)^p x\,dx$ eigent-

lich ein Aggregat aus zwei Ausdrücken

$\frac{1}{b}(a+bx)^{p+1}dx$ und $-\frac{a}{b}(a+bx)^p dx$ ausmacht, und sehr natürlich gerade in diese beiden Theile wiederum zerlegt werden muſs, um sein Integral vermittelst der Fundamentalregel genau angeben zu können.

§. 8. Eben daraus ist nun schon abzunehmen, daſs dem Ausdrucke

$(a+bx)^p x^m dx$ noch mehre solche Theile zugehören müssen, in welche man denselben genau zerlegen muſs, um ihn genau integriren zu können.

Denn da $x = \frac{a+bx}{b} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b}(a+bx-a)$ ist: so muſs

$$x^m = \frac{1}{b^m}\left((a+bx)^m - ma(a+bx)^{m-1} + \frac{m.m-1.}{1.2}a^2(a+bx)^{m-2}\ldots\right)$$

also der vorgegebene Ausdruck $(a+bx)^p x^m dx$ auch

$$= \frac{1}{b^m}\left((a+bx)^{p+m} - ma(a+bx)^{p+m-1}\right.$$
$$\left.+\frac{m.m-1.}{1.2}a^2(a+bx)^{p+m-2}\ldots\ldots\right)dx,$$

also $\int(a+bx)^p x^m dx =$

$$\frac{1}{b^m b}\left(\frac{(a+bx)^{p+m+1}}{p+m+1} - \frac{m.a(a+bx)^{p+m}}{p+m} + \frac{m.m-1.}{1.2}a^2.\frac{(a+bx)^{p+m-1}}{p+m-1}\ldots\right.$$
$$\ldots \pm \frac{m.m-1.\ldots.m-r.}{1.2\ldots r.r+1.}.a^{r+1}.\frac{(a+bx)^{p+m-r}}{p+m-r} \mp \ldots\ldots$$

also kurz vor diesem $r$ten Gliede schon beendigt seyn; falls $m - r = o$, also m irgend eine ganze bejahte Zahl r ist.

§. 9. Gehen wir nun endlich an das allgemeinste $(a+bx^n)^p x^m dx$, welches wir der Kürze wegen $= T^p d\mathfrak{X}$ schreiben wollen: so bemerken wir sogleich, daſs der Stammgröſse Differential $dT = n.bx^{n-1}dx$

den veränderlichen Factor x^{n-1} schon enthält, und wir daher den freien Factor $d\mathfrak{X} = x^m\,dx$, als $= x^{m-n+1}x^{n-1}\,dx$ betrachten, und bloſs dem Factor x^{m-n+1} eine solche Gestalt geben müssen, daſs er mit dem x^{n-1} in dem Differentiale der Stammgröſse sich gehörig vereinigen kann. In dieser Hinsicht bedenkt man wiederum, daſs $x^n = \frac{1}{b}(T-a)$ ist, also

$x = \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}(T-a)^{\frac{1}{n}}$, und daher x^{m-n+1}

$= \frac{1}{b^{\frac{m+1}{n}-1}}(T-a)^{\frac{m+1}{n}-1} = \frac{1}{b^{M-1}}(T-a)^{M-1}$, der Kürze wegen $M = \frac{m+1}{n}$ bedeutend, folglich auch

$$x^{m-n+1} = \frac{1}{b^{M-1}}\left\{T^{M-1} - \frac{M-1}{1}\,a\,T^{M-2} + \frac{M-1.M-2.}{1.2}\,a^2\,T^{M-3} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \pm \frac{M-1.M-2\ldots\ldots M-r.}{1.2\ldots\ldots r}\,a^r\,T^{M-r-1} \mp \ldots\ldots \right\},$$

demnach $T^p\,d\mathfrak{X} =$

$$\frac{1}{nb^M}\left\{T^{p+M-1} - \frac{M-1}{1}\,a\,T^{p+M-2} + \frac{M-1.M-2.}{1.2}\,a^2\,T^{p+M-3} - \ldots \right.$$
$$\left. \pm \frac{M-1.M-2\ldots\ldots M-r.}{1.2\ldots\ldots r}\,a^r\,T^{p+M-r-1} \mp \ldots \right\} n\,b\,x^{n-1}\,dx.$$

Da nun $n\,b\,x^{n-1}\,dx = d\,(a+bx^n) = dT$ ist: so haben

V) wir $\int(a+bx^n)^p\,x^m\,dx =$

$$\frac{1}{nb^M}\left\{\frac{T^{p+M}}{p+M} - \frac{M-1}{1}\cdot\frac{aT^{p+M-1}}{p+M-1} + \frac{M-1.M-2}{1.2}\cdot\frac{a^2\,T^{p+M-2}}{p+M-2} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \pm \frac{M-1.M-2\ldots\ldots M-r}{1.2\ldots\ldots r}\cdot\frac{a^r\,T^{p+M-r}}{p+m-r} \mp \ldots\ldots \right\},$$

also dieses Integral mit dem $(r-1)$ten Gliede schon sich endend, wenn im $r$ten Gliede der Factor $M-r=0$, also $M=r$, das heiſst $\frac{m+1}{n}$ irgend einer ganzen Zahl r gleich ist; es mag übri-

gens m und n eine ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl seyn.

§. 10. Auf diese Beendigung der Reihe hat nun p gar keinen Einfluſs; welches freilich ganz erwünscht seyn mag, wo $\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte Zahl ist, und demnach bei jedem p das obige Integral genau liefert. Wenn aber $\frac{m+1}{n}$ eine verneinte oder doch nur eine gebrochene bejahte Zahl ist, und daher die Reihe III, ins Unendliche fortlaufend seyn würde; so wird man die Frage aufwerfen, ob es nicht eine anderweitige Reihe geben möchte, welche bei einigen solchen m und n durch den Einfluſs einiger p sich ebenfalls beendigen müſste?

In dieser Hinsicht werden wir wiederum, wie schon oben in §. 2, die p ins Spiel zu ziehen suchen, durch die Betrachtung, daſs jedes

$\int(a+bx^n)^p x^m dx$ auch $= \int(b+ax^{-n})^p x^{m+np} dx$ ist;

wodurch wir statt des Kriterii $\frac{m+1}{n} = r$ für IV, nunmehr das Kriterium $\frac{m+np+1}{-n} = r$ gewinnen, nämlich nunmehr wissen, daſs jedes $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ auch dann genau integrabel seyn muſs, wenn $\frac{m+np+1}{-n} = +r$, also $\frac{m+1}{n}+p = -r$, also M + p einer verneinten ganzen Zahl gleich ist; auch die dafür gehörig integrirte Reihe aus der vorigen IV. sich ergeben muſs, wenn wir statt ihrer $T = a+bx^n$ bedeutend, allenthalben $T = b+ax^{-n}$ bedeutend, auch

statt ihrer a; b; n und $M = \frac{m+1}{n}$ bedeutend, allenthalben b; a; −n und $\mu = \frac{m+np+1}{-n}$ bedeutend schreiben; wodurch wir nun

V) $\int(a+bx^n)^p x^m dx =$

$$\frac{1}{-na^\mu}\left\{\frac{T^{p+\mu}}{p+\mu}-\frac{\mu-1}{1}.b.\frac{T^{p+\mu-1}}{p+\mu-1}+\frac{\mu-1.\mu-2.}{1.2}b^2\frac{T^{p+\mu-2}}{p+\mu-2}-\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\pm\frac{\mu-1.\mu-2\ldots\ldots\mu-r.}{1.2\ldots\ldots r}b^r\frac{T^{p+\mu-r}}{p+\mu-r}\mp\ldots\right\},$$

als eine Reihe erhalten, welche durch irgend einen rten Factor $\mu - r = 0$ wegfallend werden muſs, wenn $\mu = + r$, also $\frac{m+np+1}{-n} = + r$, also $\frac{m+1}{n} + p = - r$, das heiſst, wenn $\frac{m+1}{n} + p$ irgend einer verneinten ganzen Zahl gleich ist.

§. 11. Nachdem ich hiermit diese fünf schon längst bekannten genauen Integrirungen zum Besten der Anfänger so vorgetragen habe, daſs sie auch das Verfahren zur Auffindung motivirt sehen: so wird ihnen auch der nunmehr folgende kürzere Vortrag verständlich seyn.

Kurzer Vortrag des Bisherigen.

§. 12. Jedes $\int(a+bx^n)^p x^m dx$, dessen $m = n - 1$ gegeben ist, kann sogleich durch die Regel $\int X^p dX = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ genau integrirt werden, denn es ist ja

$\int(a+bx^n)^p x^{n-1} dx =$

$$\frac{1}{nb}\int(a+bx^n)^p\, nb\, x^{n-1} dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{n.b(p+1)}.$$

§. 13. Da hierin namentlich auch n jede constante Grofse seyn kann: so ist es nur ein einzelner Fall derselben Integrirung, wenn wir auch

$\int (ax^{-n}+b)^p \cdot x^{-n-1} dx =$

$$\frac{1}{-na} \int (ax^{-n}+b) \cdot -na\, x^{-n-1} dx = -\frac{(ax^{-n}+b)^{p+1}}{na(p+1)}$$

hersetzen.

Da nun ferner jedes $(a+bx^n)^p = (ax^{-n}+b)^p x^{np}$, und umgekehrt jedes $(ax^{-n}+b)^p = (a+bx^n)^p x^{-np}$ bleibt: so mufs auch

$\int (a+bx^n)^p x^m dx = \int (ax^{-n}+b)^p x^{m+np} dx$ bleiben, mufs daher, wenn $m+np = -n-1$, folglich $m = -(p+1)n-1$ ist, allerdings auch

$$\int (a+bx^n)^p x^{-n(p+1)-1} dx = \frac{1}{-na} \frac{(ax^{-n}+b)^{p+1}}{p+1}$$

$$= \frac{1}{-na} \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{p+1} x^{-n(p+1)} \text{ seyn.}$$

§. 14. Der Kürze wegen die eine Stammgröfse (*Truncus*) $a+bx^n$ durch T und die andere $ax^{-n}+b$ durch T geschrieben, wissen wir also, dafs genau integrabel nicht nur I) $\int T^p x^m dx = \frac{T^{p+1}}{nb(p+1)}$ seyn mufs, wenn $m = n-1$ gegeben ist,

sondern auch II) $\int \mathit{T}^p x^m dx = \frac{1}{-na} \frac{\mathit{T}^{p+1}}{p+1}$ seyn mufs, wenn $m = -(p+1)n-1$ gegeben ist.

§. 15. Durch II) liegen nun viele $\int T^p x^m dx$ genau integrirt vor Augen, die durch I) nicht sogleich integrabel scheinen; und umgekehrt. Auch kann $m = n-1$, u. zugleich $m = -n(p+1)-1 = -n-1$ nur seyn, wenn $n = 0$ oder $p = 0$ ist; daher nur unter dieser Bedingung das vorgegebene $\int T^p x^m dx$

nach beiden Formeln zugleich geradezu integrabel seyn kann.

§. 16. Wenn aber ein vorgegebenes $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ weder durch I) noch durch II) unmittelbar integrabel ist, auch nicht etwa eines von den logarithmischen oder trigonometrischen Integralen ausmacht, die wir in späteren Kapiteln aufgeführt sehen werden: so muſs man es in eine solche Reihe aufzulösen suchen, deren Glieder einzeln integrirbar sind, und dieses wird durch die Binomialreihe am besten geleistet.

Denn da sie uns $(a+bx^n)^p =$

$$a^p + p.a^{p-1}bx^n + \frac{p.p-1.}{1.2}a^{p-2}b^2x^{2n} + \frac{p.p-1.p-2.}{1.2.3}a^{p-3}b^3x^{3n} + \ldots$$

gibt: so haben wir auch $(a+bx^n)^p x^m dx =$

$$a^p x^m dx + pa^{p-1}bx^{n+m}dx + \frac{p.p-1.}{1.2}a^{p-2}b^2x^{2n+m}dx + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{p.p-1\ldots\ldots p-(r-1).}{1.2\ldots\ldots r}a^{p-r}b^r x^{rn+m}dx + \ldots$$

Indem wir nun jedes Glied dieser Reihe sogleich durch die erste algebraische Integrirungsregel zu integriren wissen; so erhalten wir

$$⊙ \quad \int(a+bx^n)^p x^m dx =$$

$$\frac{a^p x^{m+1}}{m+1} + p.a^{p-1}b\frac{x^{n+m+1}}{n+m+1} + \frac{p.p-1}{1.2}.a^{p-2}b^2.\frac{x^{2n+m+1}}{2n+m+1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p.p-1\ldots\ldots p-(r-1)}{1.2\ldots\ldots r}a^{p-r}b^r\frac{x^{rn+m+1}}{rn+m+1} + \ldots$$

Auch kann man bei Entwickelung der Reihe, bx^n als das erste, und a als das zweite Glied der Stammgröſse ansetzen; wodurch wir

$$☽ \quad \int(a+bx^n)^p x^m dx =$$

$$b^p.\frac{x^{m+np+1}}{m+np+1} + \frac{p}{1}.ab^{p-1}\frac{x^{m+n(p-1)+1}}{m+n(p-1)+1} + \frac{p.p-1.}{1.2}a^2b^{p-2}\frac{x^{m+n(p-2)+1}}{m+n(p-2)+1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p.p-1\ldots\ldots p-(r-1).}{1.2\ldots\ldots r}a^r b^{p-r}\frac{x^{m+n(p-r)+1}}{m+n(p-r)+1} + \ldots$$ erhalten.

§. 17. Wollte man statt $(a+bx^n)^p$ auch das ihm gleichbleibende $(ax^{-n}+b)x^{np}$ der Entwickelung unterwerfen; so würde man doch keine neue Reihe, sondern gerade die beiden schon gefundenen ☉ und ☽ wieder erhalten.

Diese Reihen aber beide vor Augen zu haben, ist rathsam, weil bald die eine, bald die andere durch ihre Divergenz unbrauchbar wird, falls die Reihen ohne Ende fortgehend bleiben.

In so ferne bei allen zu integrirenden Reihen gewünscht wird, daſs sie, wo möglich, abbrechen und dadurch das Integral genau geben möchten: so ist dieses bei der einen hier gefundenen, wie bei der andern nur der Fall, wenn in irgend einem $r$ten Gliede der Factor $p-r=0$ sich ergibt, also das gegebene p irgend eine ganze Zahl r ist, und es wird III) dann auch die eine Reihe der andern rückwärts geschrieben völlig gleich seyn.

§. 18. Mag aber p gegeben seyn, wie es will, auch in einem als Hülfsfactor angenommenen x^h der Exponent h seyn, was er will; allemal muſs $\int T^p x^m dx = \int T^p x^h . x^{m-h} dx$ bleiben. Indem nun, wie bisher, $T = a + bx^n$ bedeuten soll, so hat man $x = \frac{(T-a)^{1|n}}{b^{1|n}}$, folglich $x^h = \frac{(T-a)^{h|n}}{b^{h|n}}$. Der Kürze wegen $\frac{h}{n} = H$ geschrieben, haben wir also

$$x^h = \frac{1}{b^H}\left\{T^H - \frac{H}{1}aT^{H-1} + \frac{H.H-1}{1.2}a^2T^{H-2} - \frac{H.H-1.H-2}{1.2.3}a^3T^{H-3} + \ldots\right\}$$

und daher $\int(a+bx^n)^p x^m dx$

$$= \frac{1}{b^H}\int\left\{T^{p+H} - \frac{H}{1}aT^{p+H-1} + \frac{H.H-1}{1.2}a^2T^{p+H-2} - + \ldots\right\}x^{\frac{m}{h}} dx.$$

Der Kürze wegen $\frac{a^r}{b^H} \cdot \frac{H.H-1 \ldots\ldots H-(r-1)}{1.2 \ldots\ldots r} = R$ geschrieben, ist $R\int(a+bx^n)^{p+H-r} \cdot x^{m-h} \cdot dx$ das allgemeine $r$te Glied in dieser Reihe, ihr erstes Glied als ein vorangehendes, für $r = o$ gehöriges, nicht mit gezählt.

Um nun zu erfahren, für welche m und n und p das Integrand vermittelst dieser Reihe sich genau ergebe, müssen wir zuvörderst fragen, wie die Hülfsgröſse h zu nehmen sey, damit man jedes Glied der Reihe einzeln dem algebraisch integrirbaren $\int X^N dX = \frac{X^{N+1}}{n+1}$, unterworfen sehe, wo N jede constante Gröſse seyn kann. Indem durch die hiermit gefundenen zuläſslichen h auch $H = \frac{h}{n}$ gefunden ist; so ist dann leicht zu sehen, bei welchen n, m und p sich ein $H - r = o$ ergeben müsse, und somit die Reihe sich endigend sey.

§. 19. Die gefragte Integrabilität des allgemeinen $r$ten Gliedes findet nur statt, wenn $m - h = n - 1$, also die Hülfsgröſse $h = m + 1 - n$ angenommen, folglich $H \left(= \frac{h}{n}\right) = \frac{m+1}{n} - 1 = M - 1$ ist.

Da wir dann für diese Reihe das $r$te Glied $=$

$$= \frac{1}{nb\,b^H} \cdot \frac{M-1.M-2 \ldots\ldots M-r}{1.2 \ldots\ldots r} a^r \frac{T^{p+M-r}}{p+M-r}$$

haben; so ist

IV) die ganze Reihe $\int(a+bx^n)^p x^m dx =$

$$= \frac{1}{nb^M} \left\{ \frac{T^{p+M}}{p+M} - \frac{M-1}{1} a \frac{T^{p+M-1}}{p+M-1} \right.$$

$$\left. + \frac{M-1.M-2.}{1.2} a^2 \frac{T^{p+M-2}}{p+M-2} - + \ldots\ldots \right.$$

in ihrem $r$ten Gliede schon sich vernullend, wenn dessen Factor $M - r = o$ sich ergibt; welches für

irgend ein $r$tes Glied eintreten muſs, wenn $M = \frac{m+1}{n}$ irgend einer ganzen bejahten Zahl gleich gegeben ist.

Zum Beispiel $\int(a+bx^n)^{-1} x^{2n-1} dx$, welches $M = \frac{m+1}{n} = \frac{2n}{n} = 2$ hätte, wird durch die Reihe IV sogleich als $= \frac{1}{nbb}\left\{\frac{(a+bx^n)^1}{1} - a \log(a+bx^n)\right\}$ gefunden.

§. 20. Obgleich die Integrabilität eines $r$ten Gliedes auch, nach einem frühern §., schon Statt finden muſs, wenn $p + \frac{m+1}{n} + 1 = r$ ist: so ist doch sogleich einleuchtend, daſs dieses kein allgemeines $r$tes, sondern nur ein einziges, durch die gegebnen p, m und n bestimmtes Glied seyn kann; also das vorgelegte Integrand durchaus genau integrirt hiedurch nur zu finden wäre, wenn

$p + \frac{m+1}{n} + 1 = 0$, also $p + \frac{m+1}{n} = -1$ gegeben wäre; wofür man dann auch die Hülfsgröſse h, die hier von dem gegebnen p, m, n unabhängig bleibt, gehörig wählen müſste, um die ganze Reihe auf ihr vorangehendes Glied eingeschränkt zu sehen; welches auch schon als ein einzeler Fall durch die folgende Vte Reihe geleistet wird. Zweckmäſsig wird diese zweite Integrabilität auf folgende Weise benutzt.

§. 21. Da $\int(a+bx^n)^p x^m dx = \int(ax^{-n}+b)^p x^{m+np} dx$, also auch $= \int T^p x^h . x^{m+np-h} dx$ ist; aus $ax^{-n}+b = T$ aber $x^{-n} = \frac{T-b}{a}$, also $x^h = \frac{(T-b)^H}{a^H}$ folgt, wenn $H = -\frac{h}{n}$ bedeutet, und demnach

auch $x^h = \frac{1}{a^H}\left\{T^H - \frac{H}{1} b T^{H-1} + \frac{H.H-1.}{1.2} b^2 T^{H-2} - + \ldots\right.$ ist:

so hat man $\int (a+bx^n)^p x^m dx =$

$$\frac{1}{a^H}\left\{T^{p+H} - \frac{H}{1} b T^{p+H-1} + \frac{H.H-1.}{1.2} b^2 T^{p+H-2} - + \ldots\ldots\right.$$

$$\ldots \mp \frac{H.H-1\ldots\ldots H-(r-1).}{1.2\ldots.r.} b^r T^{p+H-r} \pm \ldots \Big\} x^{m+np-h} dx.$$

Da nun das allgemeine $r$te Glied integrabel ist, wenn $m + np - h = -n - 1$, also die Hülfsgröfse $h = m + 1 + (p + 1) n$ genommen wird, wodurch sich

$$H = -\frac{h}{n} = -\frac{m+1}{n} - p - 1 = M - p - 1,$$

und im $r$ten Gliede dessen Factor $\int T^{p+H-r} x^{m+np-h} dx =$

$$\frac{1}{-na} \cdot \frac{T^{-M-r}}{-M-r} = \frac{1}{na(M+r) T^{M+r}} = \frac{1}{na(M+r)} \left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)^{M+r}$$

sich ergibt: so hat man

V) die ganze Reihe $\int (a+bx^n)^p x^m dx =$

$$\frac{1}{na.a^H}\left\{\frac{1}{M}\left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)^M - \frac{H}{1} \cdot \frac{b}{M+1} \cdot \left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)^{M+1}\right.$$

$$+ \frac{H.H-1.}{1.2} \cdot \frac{b^2}{m+2} \left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)^{M+2} \ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\ldots \mp \frac{H.H-1\ldots\ldots H-(r-1).}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \frac{b^r}{M+r}\left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)^{M+r} \pm \ldots\ldots\right\}$$

im $r$ten Gliede abbrechend, wenn $H = r - 1$, das ist $-\frac{m+1}{n} - p = r$, also $\frac{m+1}{n} + p$ irgend einer verneinten ganzen Zahl gleich gegeben ist.

§. 22. Hiermit haben wir nun gefunden, dafs:

I) wenn $m = n - 1$ gegeben ist, p mag seyn, was es will,

II) wenn $m + np = -n - 1$ gegeben ist,

III) wenn $p = r$, das heifst, p irgend einer bejahten ganzen Zahl r gleich gegeben ist, m und n mögen gegeben seyn, wie sie wollen,

IV) wenn $\frac{m+1}{n} = r$ gegeben ist, bei jedem p,

V) wenn $\frac{m+1}{n} + p = -r$ gegeben ist,

in jedem dieser 5 Fälle das Integral $\int(a+bx^n)^p x^m\,dx$ genau gefunden, das heifst, durch eine endliche Zahl von integrirten Gliedern vermittelst der algebraischen Integrirungsregel $\int X^p dX = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ zu finden ist.

Absichtlich habe ich die Formeln I) und II), obgleich sie in den Reihen IV) und V) als einzelne Fälle für $r = 1$ wiederum mit vorkommen, dennoch vorangeschickt, weil wir ihnen, indem sie für die in III) entwickelte Binomialreihe benutst werden, die beiden Reihen IV) und V) zu verdanken haben.

Da es nun mehre, als die in I) und II) aufgeführten beiden Fälle nicht gibt, in welchen das vorgegebene Integrand der angeführten algebraischen Integrirungsregel unterworfen wäre: so ist keine Möglichkeit da, vermittelst der in III) aufgeführten Binomialreihe noch mehre als die in IV) und V) aufgeführten Fälle dieser algebraischen Integrirungsregel zu unterwerfen.

§. 23. Da es aber aufser der in III) befolgten Binomialreihe, welche im rten Gliede sich endigt, wenn $p = r$ gegeben ist, noch eine zweite (Vorerinner. V. §. 5.) gibt, welche im rten Gliede sich endigt, wenn $p = -r$, das heifst, wenn p einer verneinten ganzen Zahl gleich gegeben ist: so wird man die Frage aufwerfen, ob nicht vermittelst dieser zweiten Reihe noch mehre Fälle der genauen Inte-

grabilität dürften aufgefunden werden! Allerdings wird man diese Frage im Voraus schon mit Nein beantworten, sobald man es sich deutlich gemacht hat, daſs eben der Grund, durch welchen man die zweite Binomialreihe aus der ersten ableiten kann, auch eben derjenige ist, den wir hier schon benutzt haben, indem wir durch $(a+bx^n)^p = (ax^{-n}+b)^p x^{np}$ aus I) auf II) schlossen: indessen ist es von anderweitigem Nutzen, einen Gebrauch dieser zweiten Reihe durchzuführen.

§. 24. Die erwähnte zweite Binomialreihe ist

$$(A+B)^p = A^p\left\{1 + \frac{p}{1}.\frac{B}{A+B} + \frac{p.p+1.}{1.2}.\frac{B^2}{(A+B)^2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{p.p+1\ldots\ldots p+r-1.}{1.2\ldots\ldots r}.\frac{B^r}{(A+B)^r} + \ldots\right\}$$

im hergesetzten rten Gliede beendigt, wenn das nächstfolgende Glied den Factor $p+r=0$ gibt, also p irgend einer verneinten ganzen Zahl gleich gegeben ist, A und B mögen seyn was sie wollen.

Wenn wir nun $A = bx^n$ und $B = a$ setzen: so haben wir $\int(bx^n+a)^p x^m dx =$

$$\int(bx^n)^p\left\{1 + \frac{p}{1}.\frac{a}{a+bx^n} + \frac{p.p+1.}{1.2}.\frac{a^2}{(a+bx^n)^2} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{p.p+1\ldots\ldots p+r-1.}{1.2\ldots\ldots r}.\frac{a^r}{(a+bx^n)^r} + \ldots\right\}x^m dx,$$

also das vorangehende Glied $= \int b^p x^{np+m} dx = \frac{b^p x^{np+m+1}}{np+m+1}$ hiemit integrirt, n, p und m möchten seyn, was sie wollen (I. §. 12).

Da aber im allgemeinen rten Gliede dessen Faktor $\int(a+bx^n)^{-r} x^{np+m} dx$ nur integrabel ist, wenn man $np+m = -n-1$ gegeben hat, und dann diesen Factor $= \frac{1}{nb}.\frac{(a+bx^n)^{-r+1}}{-r+1}$ erhält; so ist der

Kürze wegen $a+bx^n = T$ geschrieben, die ganze Reihe $\int(a+bx^n)^p x^m dx =$

$$\frac{b^p}{nb}\left\{bx^n + \frac{p}{1}.a\frac{T^0}{0} + \frac{p.p+1}{1.2}.a^2\frac{T^{-1}}{-1} + \frac{p.p+1.p+2}{1.2.3}.a^3.\frac{T^{-2}}{-2} + \ldots\ldots + \frac{p.p+1\ldots\ldots p+r-1}{1.2\ldots\ldots r}.a^r.\frac{T^{-r+1}}{-r+1} + \ldots\ldots\right\}$$

mit ihrem $r$ten Gliede allerdings beendigt, wenn $p = -r$ gegeben ist. Da wir aber, um aus der vorhergehenden Reihe durch Integrirung ihre einzelen Glieder zu finden, voraussetzen mufsten, dafs $np+m = -n-1$ gegeben, also $p = -\frac{m+1}{n} - 1$ gegeben sey: so kann sie in ihrem $r$ten Gliede abbrechend nur seyn, wenn $-\frac{m+1}{n} - 1 = -r$, also $\frac{m+1}{n}$ irgend einer ganzen bejahten Zahl gleich gegeben ist; und da wissen wir ja schon durch die Reihe IV) genau zu integriren.

§. 25. Allerdings werden die beiden Reihen VI) und IV), auf einerlei Beispiel angewandt, etwas verschiedene Integrale geben, die aber nur in Hinsicht ihres constanten Gliedes verschieden seyn können; z. B. $\int(a+bx^n)^{-2}x^{3n-1}dx$ ergibt sich durch VI) als

$$= \frac{1}{nb^3}\left\{bx^n - 2a\log(a+bx^n) + \frac{a^2}{a+bx^n}\right. + C$$ und

würde dagegen als

$$= \frac{1}{nb^3}\left\{a+bx^n - 2a\log(a+bx^n) + \frac{a^2}{a+bx^n}\right. + K$$ durch

IV) in §. 19. gefunden werden.

Beide Ausdrücke sind nur um das constante Glied $\frac{a}{nb^3}$ von einander abweichend; und bei jeder Anwendung würde sich finden, dafs man beim Ge-

brauche des zweites Ausdruckes die Constante $K = C - \frac{a}{nb^3}$ zu nehmen habe, wo bei dem Gebrauche des ersten Ausdruckes die Constante C erfordert wird.

§. 26. Um die genaue Integrirung z. B. für $\int(5x^4+8x^5)^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{10}{3}}dx$ zu versuchen, hat man, nach §. 35, zu bedenken, daſs dieses auch $= \int(5+8x^1)^{-\frac{1}{3}}x^2\,dx$, und hiermit der Form $\int(a+bx^n)^p x^m\,dx$ dergestalt unterworfen ist, daſs man $n = 1$, $p = -\frac{1}{3}$ und $m = 2$, also $\frac{m+1}{n} = \frac{3}{1}$, der ganzen Zahl 3 gleich hat, also durch Reihe III) das genaue Integral

$$= \frac{1}{8^3}\left(\tfrac{3}{8}(5+8x)^{\frac{8}{3}}\right) - 6(5+8x)^{\frac{5}{3}} + \frac{75}{2}(5+8x)^{\frac{2}{3}}$$

in seinem veränderlichen Theile findet, dem man noch die Constante C hinzuzufügen hat.

Methode des Rational-machens.

§. 27. Um an einer Function zu finden, bei welchen Werthen einiger in ihr vorkommenden Gröſsen, sie genau integrabel seyn würde, pflegt man auch nach denjenigen Werthen zu fragen, bei welchen sie einer solchen Irrationalität könnte entledigt werden, durch welche ihre genaue Integrabilität verhindert wird. Wenigstens würde auf die in diesem Kapitel behandelte Frage, gerade aus diesem Gesichtspuncte das sogenannte Rational-machen müssen angelegt werden.

Allerdings ist es gewiſs, daſs ein gegebnes $(a+bx^n)^{\frac{q}{g}}.x^m\,dx$, durch eine endliche Anzahl von lauter integrabelen Gliedern sich müsse darstellen lassen, sobald man in demselben, statt der gebrochenen

Dignität $\frac{q}{g}$, irgend eine ganze bejahte Dignität anzusetzen wüſste.

§. 28. Um nun das irrationale Binomium $(a+bx^n)^{\frac{q}{g}}$ in rationale Form zu bringen, pflegt man $a+bx^n = z^g$ zu setzen, wodurch man $(a+bx^n)^{\frac{q}{g}} = z^q$ erhalt, dessen q eine ganze Zahl seyn wird, wenn man von dem Bruche $p = \frac{q}{g}$ verlangt hat, daſs er durch ganze Zahlen im Zähler und Nenner bereits ausgedrückt sey.

Da aus der Ansetzung folgt, daſs $x = \left(\frac{z^g - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, also $x^m = \left(\frac{z^g - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$, und $dx = \frac{(z^g-a)^{\frac{1}{n}-1}}{n b^{\frac{1}{n}}} \cdot g z^{g-1} dz$ sey: so haben wir

$$(a+bx^n)^{\frac{q}{g}} \cdot x^m dx = z^q \frac{(z^g-a)^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{(z^g-a)^{\frac{1}{n}-1}}{n b^{\frac{1}{n}}} g z^{g-1} dz,$$

also hiemit

$$1) \qquad \text{,,} \quad = \frac{g}{n b^{\frac{m+1}{n}}} (z^g - a)^{\frac{m+1}{n}-1} z^{q+g-1} dz.$$

§. 29. Da hierin namentlich auch a und b, n und m jeden Werth müssen haben können, folglich auch a und b gegen einander vertauscht, $-n$ statt n, und $m+np$ statt m gesetzt werden kann, bei dieser Aenderung aber die linke Seite der Gleichung unverändert bleibt: so haben wir auch

$$2) \; (a+bx^n)^{\frac{q}{g}} x^m dx = -\frac{g}{n} a^{\frac{m+np+1}{n}} (z^g-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)-1} z^{q+g-1} dz,$$

Demnach sehen wir das vorgegebne Integrand derjenigen Irrationalität, welche nach §. 1. hier ins Auge zu fassen war, entledigt,

durch 1), wenn $\frac{m+1}{n} - 1$ eine bejahte ganze Zahl, oder o ist,

durch 2), wenn $\frac{m+1}{n} + p + 1$ irgend eine verneinte ganze Zahl, oder o ist.

Und so hätten wir, durch dieses Rational-machen, überhaupt nur die beiden Kriteria IV und V (§. 22.) entdeckt, und die wichtigen Kriteria I und II wären uns unentdeckt geblieben! Sehr natürlich! weil ja die Rationalität des Binomiums nicht das ausschliefsende Erfordernifs der genauen Integrabilität, sondern der vorgegebene Integrand mit einem Mahle, und geradezu integrabel ist, bei jedem $m = n - 1$, die Dignität p mag seyn, welche sie will!

Selbst auch der treffliche Mathematiker Tedenat hat in §. 352, Seite 220—224 seiner *Leçons élément. T. II.*, nicht alle Kriteria aufgefunden, und gleichwohl in §. 357, Seite 236 versichert, dafs man in §. 352 die Fälle aufgeführt finde, in welchen sich $(a + bx^n)^p x^m dx$ rational machen lasse, obgleich zwei der dort aufgeführten Fälle vom Rational-machen unabhängig sind.

Wie viel mehr wird es also bei schwierigern Integranden zu befürchten seyn, dafs man die besten Integrirungen verfehlen könne, wenn man lediglich auf das Rational-machen achtet! Bin ich ferner mit Recht der Meinung, dafs man dabei das $\mp$ der Irrationalen nicht allemal gehörig beachtet und behandelt hat (wie ich schon in Vorerinnerung I. geäufsert habe); nehme ich ferner in Bedacht, dafs das Ratio-

nal-machen gerade die schwierigste unter allen Künsten der unbestimmten Analytik ausmacht, meinen Lehrlingen aber schlechterdings anzurathen ist, auf die reine Analysis nicht zu viele Zeit zu verwenden, wo sie sich für die ihnen obliegende angewandte Mathematik nicht belohnt: so wird man es für wohl überlegt anerkennen, daſs ich des Rational-machens nur selten fernerhin erwähnen, und dagegen die Integrirungen unmittelbar zu erweisen suchen werde. Sollten indessen andere Lehren, deren Betreibung uns nützlicher und nöthiger ist, etwas Raum dazu übrig lassen: so werde ich am Ende des Buches noch einiges darüber beibringen.

Sechstes Capitel.

Integrale von algebraischen Summen; auch Producte aus mehren Differentialen, und daraus gefolgerte Reductionsformeln.

§. 1. Unser Vortrag der Integrirungsregeln fing damit an, aus $d.ax^n = na^{x-1}dx$, als einem eingliedrigen (monomen) Differential, auf dessen Integral ax^n zurück zu schlieſsen; dann aber eben so auch aus $d.aX^n = naX^{n-1}dX$ auf das Integral X^n zurück zu schlieſsen, obgleich diese Stammgröſse X schon aus vielen Gliedern, also auch ihr Differential dX schon aus vielen Gliedern bestehen, z. B. ein $dX = pdx - qdx + rdx$ seyn kann, und die Coefficienten p, q, r, constante, oder selbst auch mit x veränderliche Gröſsen seyn mögen, wie sie wollen.

Dafs nun z. B.

wenn $X^{n-1}dX = X^{n-1}p\,dx - X^{n-1}q\,dx + X^{n-1}r\,dx$ ist,
auch $\int X^{n-1}dX = \int X^{n-1}p\,dx - \int X^{n-1}q\,dx + \int X^{n-1}r\,dx$ seyn

mufs, ist eine so einleuchtende Folge aus den Differenziirungsregeln einer solchen Summe (Diff. R. VI. §. 25.), dafs ich auch in Integr. R. I., §. 15., wo wir zum ersten Mahle dergleichen Forderung zu benutzen hatten, lediglich auf jene Differenziirungsregel mich zu beziehen, für hinreichend halten konnte.

§. 2. Dagegen ist es sehr rathsam, diejenige Integrirungsregel, welche wir der Behandlung eines Productes aus zwei Variabeln zu verdanken haben, sorgfältig darzustellen.

P und Q mögen zwei veränderliche Gröfsen seyn, welche sie wollen, auch von einander abhängig oder ganz unabhängig gedacht werden, in jedem Falle ist $d.PQ = PdQ + QdP$; woraus wir allerdings schliefsen können,

dafs jedes $\int(P\,dQ + Q\,dP) = PQ + \text{Const}$ seyn mufs; und so würde man, wenn z. B. x und y zwei einander normale Dimensionen wären, aus dem zweigliedrigen Differential $y\,dx + x\,dy$ zu schliefsen wissen, dafs das Integral $\int(y\,dx + x\,dy) = xy + C$ seyn mufs, nämlich das mit x und mit y veränderliche Rechteck xy, den veränderlichen Theil des Integrales ausmachen mufs.

§. 3. Indessen ist es nur selten der Fall, die mehrgliedrigen Differentiale gerade so gegeben zu erhalten, dafs sie das vollständige Differential eines Productes aus mehren veränderlichen Gröfsen ausmachen.

Auch wenn P und Q beides Functionen von einerlei veränderlicher Gröfse x sind, worauf wir

uns absichtlich hier einschränken wollen, und wir das Integral $\int PdQ$ zu finden verlangten, dieses aber ein solches $\int(a + bx^n)^p x^m dx$ wäre, welches wir durch die Regeln des vorigen Kapitels nicht genau zu finden wüſsten, und wir nunmehr, wie es allerdings gewöhnlich und rathsam ist, zu dem obigen $\int(PdQ + QdP) = PQ$ unsere Zuflucht nehmen: so erhellet daraus zuvörderst, daſs $\int PdQ$ allein genommen. nicht $= PQ$ seyn kann.

§. 4. Wenn wir dann ferner nach §. 1 bedenken, daſs jedes $\int(PdQ + QdP) = \int PdQ + \int QdP$,
also auch jedes $\int PdQ + \int QdP = PQ$,
folglich jedes $\int PdQ = PQ - \int QdP$ seyn muſs: so sind wir hiermit zu der wichtigen Lehre gelangt, daſs wir $\int PdQ$ genau zu integriren wissen würden, falls uns $\int QdP$ genau angeblich wäre.

Man pflegt alsdann zu sagen, daſs man das vorgegebne $\int PdQ$ auf ein anderes Integral $\int QdP$ hingebracht habe; und in der That hat sich diese Gleichung als eines der reichhaltigsten Reductionsmittel bekannt gemacht.

§. 5. Wenn wir sogleich das allgemeine Integrànd $\int X dx$, dessen X jede Function einer stetig veränderlichen Gröſse x bedeuten soll, dieser Gleichung ♀) $\int PdQ = PQ - \int QdP$ unterwerfen: so können wir 1) $\int X dx = Xx - \int x dX$ daraus schlieſsen, und somit versichert seyn, daſs wir auch das vorgegebne $\int X dx$ genau integrirt hätten, sobald das rückständige Integrand $\int x dX$ genau integrirt wäre.

Da sich nun, X mag seyn, welche Function es will, ihr erster Differentialquotient $\frac{dX}{dx}$ allemal finden läſst: so können wir das rückständige Integrand,

als ein $\int x \frac{dX}{dx} dx$, auch als ein $\int \frac{dX}{dx} . x dx$, wiederum der Gleichung 1) $\int P . dQ = PQ - \int Q dP$ unterworfen, und

dadurch 2) $\int \frac{dX}{dx} . x dx = \frac{dX}{dx} \frac{xx}{2} - \int \frac{xx}{2} . d \frac{dX}{dx}$ finden; wodurch

wir also $\int X dx = xX - \frac{x^2}{2} . \frac{dX}{dx} + \int \frac{x^2}{2} . d . \frac{dX}{dx}$ gefunden hätten.

Das hier rückständige Integrand

als $\int \frac{ddX}{dx\,dx} . \frac{x^2 dx}{2}$, abermals

der Gleichung $\int P . dQ = PQ - \int Q dP$ unterworfen,

wird uns 3) $\int \frac{ddX}{dx\,dx} . \frac{x^2 dx}{2} = \frac{ddX}{dx\,dx} . \frac{x^3}{2.3} - \int \frac{x^3}{2.3} d \frac{ddX}{dx\,dx}$,

also $\int X dx = xX - \frac{x^2}{2} . \frac{dX}{dx} + \frac{x^3}{2.3} \frac{ddX}{dx\,dx} - \int \frac{x^3}{2.3} . \frac{d^3X}{dx^3} . dx$

geben, und somit zum rten Male geben müssen

$$\int X dx = xX - \frac{x^2}{2} \frac{dX}{dx} + \frac{x^3}{2.3} \frac{d^2X}{dx^2} - \frac{x^4}{2.3.4} \frac{d^3X}{dx^3} + - \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{x^{r-1}}{1.2.3\ldots r-1.} \frac{d^{r-1}X}{dx^{r-1}} \mp \int \frac{x^r}{1.2.3.\ldots r} \frac{d^rX}{dx^r} dx.$$

§. 6. Allerdings ist es der Mühe werth, diese Reihe, welche schon Joh. Bernoulli gefunden hat, uns dargestellt zu haben; denn es ist durch sie einleuchtend, daſs jedes Integrand $\int X dx$, entweder durch die ersten r Glieder dieser Reihe genau kann gefunden, oder dieser Reihe gemäſs, immer weiter und weiter fortlaufend kann gefunden werden, und allemal, was der Genauigkeit fehlt, in dem rückständigen Integranden $\int \frac{x^r}{1.2.3.\ldots.r.} \frac{d^rX}{dx^r}$ bestehen muſs. Das erste wird bei jedem solchen X sich ergeben, durch dessen fortgesetzte Differenziirung

man eine Reihe von Differentialquotienten erhält, die mit irgend einem $\frac{d^r X}{dx^r} = 0$ sich endigt.

Wenn aber von einem wirklichen Gebrauche dieser Reihe die Rede seyn soll: so würde sie z. B. auf das merkwürdige Integrand $\int(a+bx^n)^p dx$ angewandt, die Differentialquotienten eines $X=(a+bx^n)^p$ zu finden verlangen; welches eine sehr mühselige Arbeit seyn, und für die einzelen Glieder der Reihe eine unschickliche Menge von Theilen herbei führen würde.

Noch unschicklicher dürfte die Arbeit ausfallen, wenn im vorgegebnen $\int X\,dx \,.\, X = \mathfrak{X}.\mathfrak{x}$ wäre, dessen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x}$ aber theils algebraisch, theils transcendent, oder auch verschiedener Transcendenz wären. An einem solchen X würden wir vielleicht in einem späteren Kapitel es darzustellen versuchen können, wie eine allgemein integrirende und reducirende Reihe, mit Rücksicht auf ihre wirkliche Brauchbarkeit, auszudrücken seyn möchte.

§. 7. In aller Hinsicht wird es nützlich und rathsam seyn, es systematisch darzulegen, wie man dieses Reductionsmittel auf das im vorigen Kapitel behandelte $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ anzuwenden hat, wenn dessen Exponenten n, p und m nicht so gegeben sind, daſs es durch eine von den Gleichungen III, IV und V des vorigen Kapitels genau integrirt werden könnte, also auch den beiden dortigen Formeln I und II nicht unterworfen ist. Und möchte dann auch das rückständige Integrand immer noch nicht vermittelst der algebraischen Integrirungsregel $\int X^p dX = \frac{X^{n+1}}{n+1}$ genau zu finden seyn: so würde man doch die Absicht einer leichten und hinreichend genauen Berechnung desselben, ebenfalls erreicht ha-

ben; falls es etwa als ein trigonometrisches, oder logarithmisches, oder logologarithmisches, aus den dafür berechneten Tafeln könnte abgenommen werden.

Siebentes Capitel.

Reductionen des $\int(a+bx^n)^p x^m dx$.

§. 1. Wird das

Integrand $\int(a+bx^n)^p x^m dx$

dem $\int P \,.\, dQ = PQ - \int Q\,dP$ (§. 4.)

erstens dergestalt unterworfen, daſs wir $dQ = x^m dx$ haben: so wissen wir das für die rechte Seite uns nöthige Integral $Q = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ sogleich anzugeben. Da wir nun übrigens das dafür uns nöthige Differential, $dP = p(a+bx^n)^{p-1} nbx^{n-1} dx$ allemal zu finden wissen: so haben wir das rückständige Integrand $\int Q\,dP = \frac{pnb}{m+1} \int(a+bx^n)^{p-1} x^{m+n} dx$; also

$$\text{I)} \quad \int(a+bx^n)^p x^m dx = \frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{m+1} - \frac{pnb}{m+1} \int(a+bx^n)^{p-1} x^{m+n} dx.$$

§. 2. Wenn wir dagegen zweitens das vorgegebne Integrand als $\int x^m . (a+bx^n)^p dx$

dem $\int P \,.\, dQ = PQ - \int Q\,dP$

geradezu unterwerfen wollten; so würde es uns an dem $\int dQ = Q$ fehlen, dessen wir für die rechte Seite bedürfen. Dieses Bedürfniſs läſst sich bei diesem Integrand durch einen im vorletzten Kapitel schon sogenannten Hülfsfactor befriedigen. Denn da das vorgegebne Integrand durch $nb\,x^{n-1}$ multipli-

cirt und dividirt,

auch $= \int \frac{x^{m-n+1}}{nb} \cdot (a+bx^n)^p nb x^{n-1} dx$ bleibt; so haben wir nunmehr $Q = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{p+1}$, und übrigens $dP = \frac{m-n+1}{nb} x^{m-n}$; also

$$\text{II)} \int (a+bx^n)^p x^m dx =$$

$$\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)} \int (a+bx^n)^{p+1} x^{m-n} dx.$$

§. 3. Möchte auch statt des hier vorgegebnen Integranden, uns ein anderes solches $\int X \mathfrak{X} dx$ vorgelegt seyn, welches weder $\int X dx$ noch $\int \mathfrak{X} dx$ schon integrabel gäbe: so würden wir doch, falls sich durch irgend einen Hülfsfactor das eine $\int X dx$, durch irgend einen andern Hülfsfactor das andere $\int \mathfrak{X} dx$ integrabel machen liefse, auch sowol die erste, als die zweite Reduction bewerkstelligen können. Mehr als diese zweierlei Reductionen aber können durch die Befolgung dieser Reductionsgleichung unmittelbar nicht gefunden werden.

§. 4. Da indessen das in II) rückständige Integrand, den constanten Factor desselben, der Kürze wegen durch $-N$ geschrieben, auch

$$= -N \int (a+bx^n)^p . (a+bx^n) . x^{m-n} dx$$

$$= -Na \int (a+bx^n)^p x^{m-n} dx - Nb \int (a+bx^n)^p x^m dx,$$

hiermit also in zwei Integranden zerlegt ist, deren letzteres dem vorgelegten Integranden additiv ist: so haben wir nun auch

$$(1+Nb) \int (a+bx^n)^p x^m dx =$$

$$\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - Na \int (a+bx^n)^p x^{m-n} dx.$$

Und da $1+Nb = 1+\frac{m-n+1}{n(p+1)} = \frac{np+m+1}{n(p+1)}$ ist: so erhalten wir

III) $\int(a+bx^n)^p x^m dx =$

$$\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{np+m+1} - \frac{m-n+1}{np+m+1}\frac{a}{b}\int(a+bx^n)^p x^{m-n} dx.$$

§. 5. Diese IIIte Reductionsgleichung wird schon häufiger und bequemer, als die beiden ersten, zu gebrauchen seyn, weil in dem rückständigen Integrand, der eine von den gegebnen Exponenten p, unverändert geblieben, nicht, wie in I und II, einer neuen Abhängigkeit unterworfen ist. In solcher Hinsicht ist es nun zu wünschen, dafs wir, die Stammgröfse $a+bx^n$, der kürze wegen durch T geschrieben, das vorgegebne Integrand $\int T^p x^m dx$ auch auf $\int T^p x^{m+n} dx$, auch auf $\int x^m T^{p-1} dx$ und auf $\int x^m T^{p+1} dx$ noch zu reduciren wüfsten; und gerade diese drei Reductionen können sämmtlich aus den drei schon gefundenen dadurch gefolgert werden, dafs jedes $(a+bx^n)^p x^m dx$ auch $=(b+ax^{-n})^p x^{m+np} dx$ ist.

§. 6. Denn da wir hiedurch berechtigt sind, in jedem schon gefundenen Reductions-Ausdrucke des vorgegebnen Integranden

statt dessen a, b, n, p, m

die Gröfsen b, a, $-n$, p, $m+np$ zu setzen,

und p dabei unverändert bleibt: so erhalten wir zuvörderst aus I)

dafs $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ auch

$$= \frac{(b+ax^{-n})^p x^{m+np+1}}{m+np+1} + \frac{pna}{m+np+1}\int(b+ax^{-n})^{p-1} x^{m+np-n} dx$$

IV) also $= \frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{m+np+1} + \frac{pna}{m+np+1}\int(a+bx^n)^{p-1} x^m dx$

seyn mufs; denn der letzte obige Factor x^{m+np-n} war auch $= x^{n(p-1)} x^m$.

Obgleich nun durch dieselben Schlüsse, aus II und III, auch V und VI können gefolgert werden: so wollen wir doch, um Anfänger mit mehren Methoden bekannt zu machen, dafür auf andere Weise verfahren.

§. 7. Da in I) der Exponent p jeden Werth haben kann, so können wir ihn auch $p+1$ fordern. Dann gibt diese Formel,

$$\int(a+bx^n)^{p+1} x^m dx$$
$$= \frac{(a+bx^n)^{p+1} x^{m+1}}{m+1} - \frac{(p+1)nb}{m+1} \int(a+bx^n)^p x^{m+n} dx$$

dessen linke Seite nun, in

$\int(a+bx^n)^p ax^m dx + \int(a+bx^n)^p bx^{m+n} dx$ zerlegt, das letzte Glied dem rückständigen Integranden a d d i t i v gibt; wodurch wir erhalten

V) $\int(a+bx^n)^p x^m dx$
$$= \frac{(a+bx^n)^{p+1} x^{m+1}}{a(m+1)} - \frac{(p+1)n+(m+1)}{m+1} \cdot \frac{b}{a} \int(a+bx^n)^p x^{m+n} dx.$$

§. 8. Aus IV kann gefolgert werden

$$\int(a+bx^n)^{p-1} x^m dx$$
$$= -\frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{npa} + \frac{m+1+np}{npa} \int(a+bx^n)^p x^m dx.$$

Hierin $p+1$ statt p geschrieben, haben wir

VI) $\int(a+bx)^p x^m dx$
$$= -\frac{(a+bx^n)^{p+1} x^{m+1}}{n(p+1)a} + \frac{m+1+n(p+1)}{n(p+1)a} \int(a+bx^n)^{p+1} x^m dx.$$

§. 9. Eine ungemeine Erweiterung kann für diese VI Formeln dadurch gewonnen werden, dafs man für jede derselben ihre eigne Regel r mal nach

einander wiederholen, und sie dadurch zu einer rfachen Umfassung erheben kann, wie folget.

§. 10. Da in §. 1. jedes $\int T^p x^m dx =$ I

$= \frac{T^p x^{m+1}}{m+1} - \frac{nbp}{m+1}\int T^{p-1} x^{m+n} dx$ erwiesen ist: so muſs es

2) auch $= \;,,\; - \;,,\; \left\{\frac{T^{p-1} x^{m+n+1}}{m+n+1} - \frac{nb(p-1)}{m+n+1}\int T^{p-2} x^{m+2n} dx\right.$ seyn;

3) auch $= \;,,\; - \;,,\; \left\{ \;,,\; \;,,\; \left[\frac{T^{p-2} x^{m+2n+1}}{m+2n+1} - \frac{nb(p-2)}{m+2n+1}\int T^{p-3} x^{m+3n} dx\right]\right.$

r) auch $= \frac{T^p x^M}{M} - \frac{nbp}{M}.\frac{T^{p-1} x^{M+n}}{M+n} + \frac{nbp}{M}.\frac{nb(p-1)}{M+n}.\frac{T^{p-2} x^{M+2n}}{M+2n} - \dots\dots$ VII

$\mp n^{r-1} b^{r-1}.\frac{p.p-1.\dots.p-(r-2).}{M.M+n.\dots.M+(r-2)n}.\left\{\frac{T^{p-(r-1)} x^{M+(r-1)n}}{M+(r-1)n} - \frac{nbp-(r-1)}{M+(r-1)n}\int T^{p-r} x^{m+rn} dx.\right.$

§. 11. Da in §. 2. jedes $\int T^p x^m dx =$ II

$= \frac{T^{p+1} x^{M-n}}{nb(p+1)} - \frac{M-n}{nb(p+1)}\int T^{p+1} x^{m-n} dx$ erwiesen ist: so muſs es

auch $= \;,,\; - \;,,\; \left\{\frac{T^{p+1} x^{M-2n}}{nb(p+2)} - \frac{M-2n}{nb(p+2)}\int T^{p+2} x^{m-2n} dx\right.$ seyn;

auch $= \;,,\; - \;,,\; \left\{ \;,,\; - \;,,\; \left[\frac{T^{p+3} x^{M-3n}}{nb(p+3)} - \frac{M-3n}{nb(p+3)}\int T^{p+3} x^{m-3n} dx\right]\right.$

auch $= \frac{T^{p+1} x^{M-n}}{nb(p+1)} - \frac{M-n}{nb(p+1)}.\frac{T^{p+2} x^{M-2n}}{nb(p+2)} + \frac{.M-n.M-2n.}{nb(p+1).nb(p+2)}.\frac{T^{p+3} x^{M-3}}{nb(p+3)} \dots$ VIII

$\mp \frac{.M-n.M-2n.\dots.M-(r-1)n.}{n^r b^r.(p+1).(p+2).\dots.(p+r-1).}\left\{\frac{T^{p+r} x^{M-rn}}{p+r} - \frac{M-rn}{p+r}\int T^{p+r} x^{m+rn} dx.\right.$

§. 12. Da in §. 4. jedes $\int T^p x^m dx =$

$$= \frac{T^{p+1}x^{M-n}}{(np+M)b} - \frac{M-n}{np+M} \cdot \frac{a}{b} \int T^p x^{m-n} dx$$ erwiesen ist; so muſs e[s]

$$2) \text{ auch } = \;,\; - \;,\; \left\{ \frac{T^{p+1}x^{M-2n}}{(np+M-n)b} - \frac{M-2n}{np+M-n} \cdot \frac{a}{b} \int T^p x^{m-2n} dx \right.$$ seyn

$$3) \text{ auch } = \;,\; - \;,\; \left\{ \;,\; - \;,\; \left[\frac{T^{p+1}x^{M-3n}}{np+M-2n} \right. \right.$$

$$- \frac{M-3n}{np+M-2n} \cdot \frac{a}{b} \int T^p x^{m-3n} dx$$

$$r) \;,\; = \frac{T^{p+1}x^{M-n}}{(np+M)b} - \frac{M-n}{np+M} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{T^{p+1}x^{M-2n}}{(np+M-n)b} + \frac{.M-n.M-2n.}{.np+M.np+M-n.} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{T^{p+1}x^{M-3n}}{(np+M-2n)b}$$

$$\ldots \mp \frac{.M-n.M-2n.\ldots M-(r-1)n.}{.np+M.np+M-n.\ldots.np+M-(r-2)n.} \cdot \frac{a^{r-1}}{b^{r-1}} \left\{ \frac{T^{p+1}x^{M-rn}}{(np+M-(r-1)n)b} \right.$$

$$- \frac{M-rn}{np+M-(r-1)n} \cdot \frac{a}{b} \int T^p x^{m-rn} d[x]$$

§. 13. Da in §. 6. jedes $\int T^p x^m dx =$

$$= \frac{T^p x^{m+1}}{np+m+1} + \frac{np\,a}{np+m+1} \int T^{p-1} x^m dx$$ erwiesen ist; so muſs es

$$2) \text{ auch } = \;,\; + \;,\; \left\{ \frac{T^{p-1}x^{m+1}}{n(p-1)+m+1} + \frac{n(p-1)a}{n(p-1)+m+1} \int T^{p-2} x^m dx \right.$$ sey[n]

$$3) \text{ auch } = \;,\; + \;,\; \left\{ \;,\; + \;,\; \left[\frac{T^{p-2}x^{m+1}}{n(p-2)+m+1} \right. \right.$$

$$+ \frac{n(p-2)a}{n(p-2)+m+1} \int T^{p-3} x^m d[x]$$

$$r) \;,\; = \frac{T^p x^{m+1}}{np+m+1} + \frac{np\,a}{np+m+1} \cdot \frac{T^{p-1}x^{m+1}}{n(p-1)+m+1} + \frac{np\,a}{np+m+1} \cdot \frac{n(p-1)a}{n(p-1)+m+1} \cdot \frac{T^{p-2}x^{m+1}}{n(p-2)+m+1}$$

$$\ldots \mp \frac{.np\,a.\,n(p-1)a\,.\ldots.\,n(p-(r-2)).\,a}{.np+M.\,n(p-1)+M.\ldots.n(p-(r-2))+M.} \cdot \left\{ \frac{T^{p-(r-1)}x^{m+1}}{n(p-(r-2))+M} \right.$$

$$+ \frac{n(p-(r-1))a}{n(p-(r-1))+M} \int T^{p-r} x^m [dx]$$

§. 14. Da in §. 7. jedes $\int T^p x^m dx =$

$$= \frac{x^M . T^{p+1}}{M . a} - \frac{n(p+1)+M}{M} . \frac{b}{a} \int T^p x^{m+n} dx$$ erwiesen ist: so muſs es V

2) auch $= \quad ″ \quad - \quad ″ \quad \left\{ \frac{x^{M+n}}{M+n} . \frac{T^{p+1}}{a} - \frac{n(p+1)+M+n}{M+n} . \frac{b}{a} \int T^p x^{m+2n} dx \right.$ seyn;

3) auch $= \quad ″ \quad - \quad ″ \quad \left\{ \quad ″ \quad - \quad ″ \quad \left[\frac{x^{M+2n}}{M+2n} . \frac{T^{p+1}}{a} \right. \right.$

$$- \frac{n(p+1)+M+2n}{M+2n} . \frac{b}{a} \int T^p x^{m+3n} dx \Big]$$

r) auch $= \frac{x^M T^{p+1}}{M . a} - \frac{n(p+1)+M}{M} . \frac{b}{a} . \frac{x^{M+n}}{M+n} . \frac{T^{p+1}}{a} + \frac{n(p+1)+M}{M} . \frac{n(p+1)+M+n}{M+n} . \frac{b^2}{a^2} . \frac{x^{M+2n}}{M+2n} . \frac{T^{p+1}}{a} - \ldots$ XI

$$\ldots \mp \frac{n(p+1)+M . n(p+1)+M+n \ldots\ldots np+M+(r-2)n}{M . M+n \ldots\ldots M+(r-2)n} . \frac{b^{r-1}}{a^{r-1}} . \left\{ \frac{x^{M+(r-1)n}}{M+(r-1)n} . \frac{T^{p+1}}{a} \right.$$

$$\left. - \frac{n(p+1)+M+(r-1)n}{M+(r-1)n} . \frac{b}{a} \int T^p x^{m+rn} dx \right\}$$

§. 15. Da in §. 8. $\int T^p x^m dx =$ **VI**

$$= -\frac{x^M T^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{M+n(p+1)}{n(p+1)a} \int T^{p+1} x^m dx$$ erwiesen ist: so mufs es

2) auch $= - \;''\; + \;''\; \left\{ -\frac{x^M T^{p+2}}{n(p+2)a} + \frac{M+n(p+2)}{n(p+2)a} \int T^{p+2} x^m dx \right.$ seyn;

3) auch $= - \;''\; + \;''\; \left\{ - \;''\; + \;''\; \left[-\frac{x^M T^{p+3}}{n(p+3)a} + \frac{M+n(p+3)}{n(p+3)a} \int T^{p+3} x^m dx \right] \right.$

r) auch $= -\frac{x^M T^{p+1}}{n(p+1)a} - \frac{M+n(p+1)}{n(p+1)a} \cdot \frac{x^M T^{p+2}}{n(p+2)a} - \frac{M+n(p+1)}{n(p+1)a} \cdot \frac{M+n(p+2)}{n(p+2)a} \cdot \frac{x^M T^{p+3}}{n(p+3)a} - \ldots$ **XII**

$$\ldots + \frac{M+n(p+1)}{n(p+1)a} \cdot \frac{M+n(p+2)}{n(p+2)a} \cdots\cdots \frac{M+n(p+r-1)}{n(p+r-1)a} \cdot \left\{ \frac{-x^M T^{p+r}}{n(p+r)a} + \frac{M+n(p+r)}{n(p+r)a} \int T^{p+r} x^m dx \right\}$$

§. 16. Durch die letzten Gleichungen, VII bis XII, liegt nun vor Augen, wie wir vermittelst einer endlichen Anzahl von Gliedern (in so fern also genau)

jedes $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ darzustellen wissen,

wenn uns, r eine bejahte ganze Zahl bedeutend,

entweder $\int(a+bx^n)^{p-r} x^{m+rn} dx$, oder $\int(a+bx^n)^{p+r} x^{m-rn} dx$ (VII und VIII)

oder $\int(a+bx^n)^p \; x^{m-rn} dx$, oder $\int(a+bx^n)^{p-r} x^m dx$ (IX und X).

oder $\int(a+bx^n)^p \; x^{m+rn} dx$, oder $\int(a+bx^n)^{p+r} x^m dx$ (XI und XII)

genau zu integriren bekannt ist.

§. 17. Zugleich aber ist es eben so einleuchtend, daſs wir vermöge dieser sechs Gleichungen jedes, nicht nur das erste, sondern auch jedes andere von diesen sechs hier aufgeführten Integranden, durch eine endliche Anzahl von Gliedern müssen darzustellen wissen,

wenn wir $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ genau integrirt haben.

Dieser letztere Schluſsgang wird nicht nur für unsern obigen und fernereh Vortrag, in welchem wir die Integrale des $\int(a+bx^n)^p x^m dx$, als algebraische oder transcendente zu finden suchen, meistens am unmittelbarsten anstellig sich beweisen; sondern wir können auch denselben auf solche Weise darlegen, daſs die Anfänger dadurch leichter, als auf irgend eine andere Weise, es durchsehen lernen, wie die sämmtlichen hieher gehörigen Integraltafeln des Hrn. Meier Hirsch könnten berechnet werden.

Es ist hiebei hinreichend, nur die ersten drei Gleichungen wirklich aufzuführen, nicht auch die allgemeine rte Gleichung, wie es in §. 10 bis §. 15

allerdings absichtlich geschehen war, um die allgemeine Darstellung in §. 16 geben zu können. Wenn man dagegen Tafeln verfertigen will, so wird man lieber aus I, 1 auf I, 2, dann auf I, 3, auf I, 4, und so weiter schliefsen. Denn wenn wir z. B. aus der in §. 1. gefundenen Reductionsgleichung

$$\text{I)}\quad \int T^p x^m dx = \frac{T^p x^{m+1}}{m+1} - \frac{pnb}{m+1} \int T^{p-1} x^{m+n} dx\,,$$

auf die hier folgende **umgekehrte** Reductionsgleichung 7, 1) geschlossen haben, so brauchen wir nur, da p und m in dieser Gleichung jeden beliebigen constanten Werth haben können, statt jedes ihrer p ein $p+1$, und statt jedes ihrer m ein $m+n$ zu fordern, um die Gleichung 7, 2) zu erhalten; und eben so brauchen wir nur in jener 7, 1) statt jedes ihrer p ein $p-2$, und statt jedes ihrer m ein $m+2n$ zu verlangen, um die Gleichung 7, 3) zu erhalten; und so weiter.

$$7,1)\quad \int T^{p-1} x^{m+n} dx = \frac{T^p x^{m+1}}{nbp} - \frac{m+1}{nbp} \int T^p x^m dx$$

$$7,2)\quad \int T^{p-2} x^{m+2n} dx = \frac{T^{p-1} x^{m+n+1}}{nb(p-1)} - \frac{m+n+1}{nb(p-1)} \int T^{p-1} x^{m+n} dx$$

$$7,3)\quad \int T^{p-3} x^{m+3n} dx = \frac{T^{p-2} x^{m+2n+1}}{nb(p-2)} - \frac{m+2n+1}{nb(p-2)} \int T^{p-2} x^{m+2n} dx$$

Und nun haben wir nur noch in 2), statt dessen rückständigen Integranden, den Ausdruck desselben aus 1) zu substituiren; aus der dadurch gefundenen Gleichung 2) dann ferner dessen rechte Seite statt des rückstandigen Integranden in 3) zu substituiren, um diese drei Gleichungen, wie im folgenden §. zu erhalten.

§. 18. In Beziehung auf die obigen Reductionen VII bis XII, mögen die umgekehrten hier folgenden durch 7 bis 12 aufgezählt, übrigens

$T = a+bx^n$ und $M = m+1$ bedeutend, fernerhin der Kürze wegen gebraucht werden.

7.

1) $\int T^{p-1} x^{m+n} dx = \frac{T^p x^M}{nbp} - \frac{M}{nbp} \int T^p x^m dx$ (Aus I §. 10)

2) $\int T^{p-2} x^{m+2n} dx = \frac{T^{p-1} x^{M+n}}{nb(p-1)} - \frac{M+n}{nb(p-1)} \cdot \frac{T^{p-1} x^M}{nbp}$

$$+ \frac{M+n}{nb(p-1)} \cdot \frac{M}{nbp} \int T^p x^m dx$$

3) $\int T^{p-3} x^{m+3n} dx = \frac{T^{p-2} x^{M+2n}}{nb(p-2)} - \frac{M+2n}{nb(p-2)} \cdot \frac{T^{p-2} \cdot x^{M+n}}{nb(p-1)}$

$$+ \frac{M+2n}{nb(p-2)} \cdot \frac{M+n}{nb(p-1)} \cdot \frac{T^p x^{m+1}}{nbp} - \frac{M+2n}{nb(p-2)} \cdot \frac{M+n}{nb(p-2)} \cdot \frac{M}{nbp} \cdot \int T x^m dx$$

8.

1) $\int T^{p+1} x^{m-n} dx = \frac{x^{M-n} T^{p+1}}{M-n} - \frac{nb(p+1)}{M-n} \int T^p x^m dx$ (Aus II §. 11.)

2) $\int T^{p+2} x^{m-2n} dx = \frac{x^{M-2n} T^{p+2}}{M-2n} - \frac{nb(p+2)}{M-2n} \cdot \frac{x^{M-n} T^{p+1}}{M-n} T^{p+1}$

$$+ \frac{nb(p+2)}{M-2n} \cdot \frac{nb(p-1)}{M-n} \int T^p x^m dx$$

3) $\int T^{p+3} x^{m-3n} dx = \frac{x^{M-3n} T^{p+3}}{M-3n} - \frac{nb(p+3)}{M-3n} \cdot \frac{x^{M-2n}}{M-2n} \cdot T^{p+2}$

$$+ \frac{nb(p+3)}{M-3n} \cdot \frac{nb(p+2)}{M-2n} \cdot \frac{x^{M-n}}{M-n} \cdot T^{p+1}$$

$$- \frac{nb(b+3)}{M-3n} \cdot \frac{nb(p+2)}{M-2n} \cdot \frac{nb(p+1)}{M-n} \int T^p x^m dx$$

9. ($M = m+1$ bedeutend.)

1) $\int T^p x^{m-n}\,dx = \frac{T^{p+1}x^{M-n}}{(M-n)a} - \frac{np+M}{(M-n)a} b \int T^p x^m\,dx$ (Aus III §. 12)

2) $\int T^p x^{m-2n}\,dx = \frac{T^{p+1}x^{M-2n}}{(M-2n)a} - \frac{np+M-n}{(M-2n)a} \cdot b \frac{T^{p+1}x^{M-n}}{(M-n)a}$

$$+ \frac{np+M-n}{(M-2n)a} \cdot \frac{np+M}{(M-n)a} \cdot bb \int T^p x^m\,dx$$

3) $\int T^p x^{m-3n}\,dx = \frac{T^{p+1}x^{M-3n}}{(M-3n)a} - \frac{np+M-2n}{(M-3n)a} \cdot b \frac{T^{p+1}x^{M-2n}}{(M-2n)a}$

$$+ \frac{np+M-2n}{(M-3n)a} \cdot \frac{np+M-n}{(M-2n)a} \cdot bb \frac{T^{p+1}x^{M-n}}{(M-n)a}$$

$$- \quad , \quad , \quad \cdot \frac{np+M}{(M-n)a} \cdot bbb \int T^p x^m\,dx$$

10.

1) $\int T^{p-1} x^m\,dx = -\frac{T^p x^M}{npa} + \frac{M+np}{npa} \int T^p x^m\,dx$ (Aus IV §. 13)

2) $\int T^{p-2} x^m\,dx = -\frac{T^{p-1}x^M}{n(p-1)a} - \frac{M+n(p-1)}{n(p-1)a} \cdot \frac{T^p x^M}{npa}$

$$+ \frac{M+n(p-1)}{n(p-1)a} \cdot \frac{M+np}{npa} \int T^p x^m\,dx$$

3) $\int T^{p-3} x^m\,dx = -\frac{T^{p-2}x^M}{n(p-2)a} - \frac{M+n(p-2)}{n(p-2)a} \cdot \frac{T^{p-1}x^M}{n(p-1)a}$

$$+ \frac{M+n(p-2)}{n(p-2)a} \cdot \frac{M+n(p-1)}{n(p-1)a} \cdot \frac{M+np}{npa} \int T^p x^m\,dx$$

11.

1) $$\int T^p x^{m+n}\, dx = \frac{T^{p+1} x^M}{n(p+1)+M} \cdot \frac{1}{b} - \frac{M}{n(p+1)+M} \cdot \frac{a}{b} \int T^p x^m\, dx$$

(Aus V §. 14)

2) $$\int T^p x^{m+2n}\, dx = \frac{T^{p+1} x^{M+n}}{n(p+1)+M+n} \cdot \frac{1}{b} - \frac{M+n}{n(p+1)+M+n} \cdot \frac{a}{bb} \cdot \frac{T^{p+1} x^M}{n(p+1)+M}$$
$$+ \frac{M+n}{n(p+1)+M+n} \cdot \frac{M}{n(p+1)+M} \cdot \frac{aa}{bb} \int T^p x^m\, dx$$

3) $$\int T^p x^{m+3n}\, dx = \frac{T^{p+1} x^{M+2n}}{n(p+1)+M+2n} \cdot \frac{1}{b} - \frac{M+2n}{n(p+1)+M+2n} \cdot \frac{a}{bb} \cdot \frac{T^{p+1} x^{M+n}}{n(p+1)+M+n}$$
$$+ \frac{M+2n}{n(p+1)+M+2n} \cdot \frac{M+n}{n(p+1)+M+n} \cdot \frac{aa}{bbb} \cdot \frac{T^{p+1} x^M}{n(p+1)+M}$$
$$- \frac{M+2n}{n(p+1)+M+2n} \cdot \frac{M+n}{n(p+1)+M+n} \cdot \frac{M}{n(p+1)+M} \cdot \frac{aaa}{bbb} \int T^p x^m dx$$

12.

1) $$\int T^{p+1} x^m\, dx = \frac{T^{p+1} x^M}{M+n(p+1)} + \frac{n(p+1)}{M+n(p+1)} \cdot a \int T^p x^m\, dx$$

(Aus VI §. 15)

2) $$\int T^{p+2} x^m\, dx = \frac{T^{p+2} x^M}{M+n(p+2)} + \frac{n(p+2)}{M+n(p+2)} \cdot a \cdot \frac{T^{p+1} x^M}{M+n(p+1)}$$
$$+ \frac{n(p+2)}{M+n(p+2)} \cdot \frac{n(p+1)}{M+n(p+1)} \cdot aa \int T^p x^m\, dx$$

3) $$\int T^{p+3} x^m\, dx = \frac{T^{p+3} x^M}{M+n(p+3)} + \frac{n(p+3)}{M+n(p+3)} \cdot \frac{T^{p+2} x^M}{M+n(p+2)}$$
$$+ \frac{n(p+3)}{M+n(p+3)} \cdot \frac{n(p+2)}{M+n(p+2)} \cdot aa\, \frac{T^{p+1} x^M}{M+n(p+1)}$$
$$+ \frac{n(p+3)}{M+n(p+3)} \cdot \frac{n(p+2)}{M+n(p+2)} \cdot \frac{n(p+1)}{M+n(p+1)} \cdot aaa \int T^p x^m\, dx.$$

Anwendung auf des Herrn Meier Hirsch Integraltafeln.

§. 19. Um z. B. die nachstehende Tafel,

$\int\frac{dx}{T}=\int\frac{dx}{T}$ (die Stammgröſse $T=a+bx^2$ bedeutend),

$\int\frac{dx}{T^2}=\frac{x}{2aT}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{T}$

$\int\frac{dx}{T^3}=\left(\frac{1}{4aT^2}+\frac{3}{8a^2T}\right)x+\frac{3}{8a^2}\int\frac{dx}{T}$

und so weiter, welches Tafel XIII., S. 46, bei Hrn. Hirsch ist, zu berechnen, ist die von uns Seite 132 unter 10. aufgeführte Tafel geeignet, indem hier $\int\frac{dx}{a+bx^2}$, also $\int(a+bx^n)^p x^m dx$, für den Fall $n=2$, $p=-1$ und $m=0$, als genau integrirt schon gefunden vorausgesetzt wird. Wir brauchen nur in jener Tafel 10. jedes n, p und m derselben, auf diese Werthe 2, —1 und 0 einzuschränken; so werden wir durch die Gleichungen 10, 1) und 10, 2) die Integrale $\int\frac{dx}{T^2}$ und $\int\frac{dx}{T^3}$ richtig wie oben gefunden haben, und durch die Gleichung 10, 3) würden wir eben so auch $\int\frac{dx}{T^4}$ vollkommen richtig erhalten.

Allerdings würde für ferneren Fortgang zu $\int\frac{dx}{T^5}$ $\int\frac{dx}{T^6}$ u. s. w. die fernere Darstellung jener Tafel 10. und auch ihre Anwendung auf einzele Fälle, etwas mühsam ausfallen. Beides kann man sich erleichtern, wenn man für jede von den obigen Tafeln 7) bis 12) das Gesetz des Fortganges in ihren Coefficienten besonders darzustellen sucht; welches aber nur der

Mühe Werth ist, Falls man selbst auch wieder solche Tafeln neu berechnen wollte.

§. 20. Ein anderes Beispiel sei die Tafel XX. bei Hirsch S. 54.

$$\left.\begin{array}{l}\int\frac{dx}{T}=\int\frac{dx}{a+bx^2}\\ \text{und }\int\frac{dx}{xT}=\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}\end{array}\right\}$$ also $T=a+bx^2$, wie vorhin bedeutend, aber hier diese beiden ersten Integranden, als für sich schon integrirt, vorausgesetzt.

$$\int\frac{dx}{x^2T}=\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{T}$$

$$\int\frac{dx}{x^3T}=-\frac{1}{2ax^2}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{xT}$$

$$\int\frac{dx}{x^4T}=-\frac{1}{3ax^3}+\frac{b}{a^2x}+\frac{b^2}{a^2}\int\frac{dx}{T}$$

$$\int\frac{dx}{x^5T}=-\frac{1}{3ax^4}+\frac{b}{2a^2x^2}+\frac{b^2}{a^2}\int\frac{dx}{xT}, \text{ u. s. w.}$$

Diese Tafel wird nun allerdings durch unsere 9te zu finden seyn. Aber wenn wir sie bloſs auf das zweite obige Integral $\int\frac{dx}{xT}$ anwenden, so werden wir nur $\int x^3 T$, $\int x^5 T$, u. s. w. dadurch finden. Um die dazwischen noch fehlenden $\int\frac{dx}{x^2T}$, $\int\frac{dx}{x^4T}$ u. s. w. zu finden, muſs dieselbe 9te Tafel auch auf das erste Integral $\int\frac{dx}{T}$ angewandt werden; daher ich hier auch dieses $\int\frac{dx}{T}$, zur Belehrung der Anfänger mit aufgeführt habe; welches Herr M. Hirsch stillschweigend vorausgesetzt hat.

§. 21. Die Integrirungen, welche hier als schon gefunden vorausgesetzt werden,

nämlich $\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\text{arc tang}\,x\sqrt{\frac{b}{a}}$

und $\int\frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ in §. 19, und

überdies auch $\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}=-\frac{1}{a}\log\frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{x}$ in §. 20,

wird man in den nächsten beiden Kapiteln erwiesen finden; und überhaupt werde ich darauf denken, dafs man in diesem Lehrbuche alle Integrale erwiesen finde, welche von Hrn. Hirsch in solchen Tafeln vorausgesetzt werden, deren wir für die uns bevorstehende Praxis irgend nachzuschlagen nöthig haben dürften.

Achtes Capitel.

Einige $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ *als Kreisbogen gefunden, und die daneben nöthigen als Logarithmen aufgeführt.*

§. 1. Zum Beispiel, das so einfach scheinende Integrand $\int(1-xx)^{-\frac{1}{2}}dx$, würde sich durch irgend eine von den bisher behandelten algebraischen Integrirungsregeln, in einer endlichen Anzahl von Gliedern nicht genau finden lassen. Da wir aber aus Diff. R. IX. §. 25. S. 157. wissen (das dortige x hier vorläufig durch $\mathfrak{x}$ geschrieben)

dafs $\int(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})^{-\frac{1}{2}}d\mathfrak{x}=\text{arc sin}\,\mathfrak{x}$ ist: so wissen wir auch, dafs jede Function X, dessen $dX=(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})^{-\frac{1}{2}}d\mathfrak{x}$ ist, allemal ein $X=\text{arc sin}\,\mathfrak{x}+C$ seyn mufs, dessen C eine Bogenlänge ausmacht, welche durch irgend ei-

nen gegebnen oder gewählten Anfangspunct der gesuchten Bogenlänge X bestimmt wird.

§. 2. Soll X gerade diejenige Bogenlänge seyn, welche mit der Sinuslänge $\mathfrak{x}$ ihren Anfang nimmt, also für $\mathfrak{x} = 0$, selbst auch ein $X = 0$ ist: so können wir aus dem einzelen Werthfalle $\mathfrak{x} = 0$ schliefsen,

dafs $0 = \text{arc sin } 0 + C = 0 + C$, also auch $C = 0$

seyn mufs; falls wir nicht etwa durch den Zusammenhang zu bedenken genöthigt sind, dafs eigentlich im Allgemeinen, $\text{arc sin } 0 = \mp n\pi . 1$ ist, so dafs n nicht nur $= 0$, sondern auch jede ganze bejahte oder verneinte Zahl seyn kann, $\pi . 1$ die Bogenlänge des Halbkreises mit dem Halbmesser 1 beschrieben, bedeutend. Da wir aber hier ein weiteres nicht beabsichtigen, als dafs wir ein vorgegebnes Integral vermittelst der trigonometrischen Tafeln mit wenig Mühe hinreichend genau anzugeben wünschen: so können wir uns hiemit ganz allgemein auf ein $n = 0$ dadurch einschränken, dafs wir nur solche Bogenlängen, die über den ersten bejahten, oder ersten verneinten Quadranten nicht hinausgehen, zur Bestimmung des arc sin $\mathfrak{x}$ gebraucht wissen wollen.

§. 3. Unter dieser Voraussetzung können wir also auch überhaupt schliefsen, dafs, wenn der Bogen X nicht gerade mit $\mathfrak{x} = 0$, sondern mit dem Endpuncte des Bogens $\text{arc sin} \mp a$ seinen Anfang nehmen soll,

also $X = 0 = \text{arc sin} \mp a + B$ seyn mufs, dann
die Constante $C = - \text{arc sin} \mp a$ zu setzen,
also $X = \text{arc sin } \mathfrak{x} - \text{arc sin} \mp a$ anzusetzen ist.

§. 4. Hiermit liegt vor Augen, dafs wir nicht etwa durch einen anders gewählten Anfang des Bogens X, die Berechnung desselben möglich machen

könnten, falls sie für die Constante $=$ o unmöglich, als X $=$ arc sin $\mathfrak{x}$, ein unmögliches X wäre.

Diese Unmöglichkeit aber muſs für jeden Werthfall des $\mathfrak{x}$, welcher über ∓ 1 hinausgeht, nothwendig eintreten; weil es ja gegen den Begriff des Sinus streitet, ihn gröſser, als den Halbmesser zu verlangen, welcher in diesen Formeln die Einheit ausmacht.

§. 5. Sey dagegen Beispielsweise $\mathfrak{x} = \frac{3}{4} = 0,75$ gegeben, so ersieht man aus den Sinus-Tafeln, daſs der diesem Sinus zugehörige Bogen $= 48^\circ\ 35'$ (beinahe) hält. Da nun in den Tafeln der Bogenlängen angegeben wird,

daſs $48^\circ = 0,8377580$
und $35' = 0,0101810$ ist: so wissen wir

daſs $\int(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})^{-\frac{1}{2}}dx = 0,8479390$ für den Werthfall $\mathfrak{x} = \frac{3}{4}$ (beinahe) seyn muſs; und sehen hieraus, wie wir auch für jeden andern einzelen Werthfall des $\mathfrak{x}$, welcher nicht über ∓ 1 hinaus geht, dieses Integral schon so gut als berechnet in den trigonometrischen Tafeln vorfinden können.

§. 6. Eben so, wie wir aus d arc sin $\mathfrak{x} = \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$, auf $\int\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \text{arc sin }\mathfrak{x} + C$ schlieſsen konnten, werden wir auf $\int -\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \text{arc cos }\mathfrak{x} + K$, aus d arc cos $\mathfrak{x} = \frac{-d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$, diesem a. a. Orte S. 157 ebenfalls ausgeführten Differentiale, allerdings vollkommen richtig schlieſsen können.

Aber ebenfalls richtig muſs es auch seyn, wenn wir schlieſsen,

daſs $\int -1 . \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = -1 . \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = -(\text{arc}\sin x + C)$ seyn muſs.

Und wenn wir dieses auch $= -$ arc sin $x - C$ schreiben, nämlich wegen des Zusammenhangs zwischen dem positiven und negativen Integrand, in dem letztern die Constante als ein $- C$ aufführen: so wird es bei dem Gebrauche beider Integrale bequem seyn, daſs ihre beiden Constanten in absoluter Gröſse allemal einander gleich zu nehmen sind; auch für die sehr gewöhnliche Forderung, daſs das Integral zugleich mit dem veränderlichen x seinen Anfang nehmen soll, nunmehr in beiden Integralen die Constante $= 0$ zu nehmen ist; da hingegen die Constante K für diese Forderung ein $K = -1$ würde seyn müssen.

§. 7. Aus demselben Grunde werden wir nun auch aus den beiden Differentialen 3) und 4) a. a. O. auf die beiden

Integrale $\int \pm \frac{dx}{1+xx} = \pm \text{arc tang}\, x \pm C$

und auf $\int \pm \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}} = \pm \text{arc sec}\, x \pm K$ aus den beiden Differentialen 5) u. 6)

auch auf $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}} = \pm \text{arc sin vers}\, x \pm C$ aus den Differentialen 7) u. 8) schlieſsen;

Hiezu noch $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \pm \text{arc sin}\, x \pm C$, aus vorigem §. geschrieben,

haben wir lauter Integrale vor Augen, unten welchem lediglich die Secanten-Bogen der Ausnahme unterworfen sind, daſs sie nicht die Constante $\pm C = 0$,

sondern die Constante $\pm K = \mp 1$ erfordern, wenn sie mit $x = 0$, selbst auch ihren Anfang nehmen sollen.

§. 8. Eben dieselbe Constante K wird hier auch Statt finden, wenn wir statt des arc sec x lieber arc cos $\frac{1}{x}$ deshalb ansetzen, weil man für die Secanten keine Tafeln hat.

Da man auch für die Quersinus keine Tafeln hat, in welchen man eine gegebne Quersinus-Länge x aufschlagen könnte, um den ihr zugehörigen Winkel φ in Graden, und dann die diesen Graden zugehörige Bogenlänge, aus den Tafeln unmittelbar abzunehmen: so mufs man sich hier daran halten, dafs jeder sin vers $\varphi = 1 - \cos\varphi$ ist,
also $\cos\varphi = 1 - \text{sin vers}\,\varphi$.

Also auch $\cos\varphi = 1 - x$, da das x in der Integralformel die als urveränderliche Gröfse gegebne Länge eines Sinus versus bedeutet. Daher können wir nun in Hinsicht auf den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln die beiden aus dem Differentiale des Quersinus gefolgerten Integrale

als $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}} = \pm \text{arc cos}\,(1 - x) \pm C$ ansetzen,

mit derselben Constante C; indem ja sowol mit sin vers $= x = 0$, als auch mit $\cos(1 - 0) = \cos 90^\circ = 0$, das Integral sich $= 0$ ergibt.

§. 9. Die Alternative $\pm$ in diesen Integralen habe ich in §. 6. sehr absichtlich dadurch erwiesen, dafs ja allemal $\int \pm \mathfrak{X}dx = \int \pm 1 \cdot \mathfrak{X}dx = \pm 1 \int \mathfrak{X}dx$ seyn mufs, wo nun das unter dem Integrirungszeichen verbliebene $\mathfrak{X}dx$ allemal in seiner absoluten, also so gut als bejahten Gröfse zu nehmen, und diese Alternative nicht etwa aus dem $\pm\sqrt{}$ bei den obigen irra-

tionalen Integranden abgeleitet, sondern bei dem rationalen Tangenten-Integrand ebenfalls vorhanden ist; auch wenn $\mathfrak{X}$ ein $\sqrt[3]{}$ wäre, ebenfalls Statt finden würde. Keinesweges wird man dadurch verhindert zu gebrauchen, daſs jedes $\sqrt{}$ sowohl bejaht als verneint seyn kann; aber die Festsetzung, daſs es in den obigen Formeln für absolut oder bejaht zu achten sey, wird uns bei den nun folgenden Reductionen dieser Formeln viele Kürze und Deutlichkeit gewähren.

§. 10. In den Gleichungen Seite 144 und 145, Seite 146 u. 147 u. s. w. findet man die bereits gefundenen Integrale zuvörderst wiederum mit teutschem $\mathfrak{x}$ aufgeführt, um dadurch zu erinnern, daſs die in demselben vorkommenden Linien $\mathfrak{x}$, sie mögen Sinus- oder Cosinus-, oder Tangenten-Längen, u. s. w. angeben, allemal den trigonometrischen Halbmesser $= 1$ genommen voraussetzen.

Eben daher rührt es nun, daſs die darin aufgeführten Integranden, mit der allgemeinen Form des algebraischen $\int(a + bx^n)^p x^m dx$ verglichen, allemal auf ein $a = 1$, und $b = 1$ eingeschränkt sind, auſser dem Quersinus-Integrand, welches gerade auf ein $a = 2$ und $b = 1$ eingeschränkt ist.

Dieser Einschränkungen kann man sich nun sicherlich am leichtesten und deutlichsten dadurch überheben, daſs man in jenen Gleichungen, $\mathfrak{x} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} x$, mit absoluten Wurzelgröſsen, in dem zuletzt erwähnten Integrand aber, $\mathfrak{x} = \frac{2b}{a} x$ setzt; wodurch man die durch x ausgedrückten Gleichungen erhält, in welchen man weit mehre $\int(a + bx^n)^p x^m dx$, als in denen durch $\mathfrak{x}$ ausgedrückten abgereicht sieht.

§. 11. Gerade diese Reductionen gewähren nun die grofse Bequemlichkeit, dafs man, auch für die durch a und b ausgedrückten Formeln, sogleich die für den Halbmesser 1 berechneten Tafeln unmittelbar zu gebrauchen hat, ohne erst wegen eines andern Halbmessers reduciren zu müssen; wodurch dagegen die bei **Vega** und andern Mathematikern gebräuchlichen Formeln, mühsam und verfänglich werden. Eben deshalb habe ich auch hier (vergleiche Diff. R. X. §. 28.) fernerhin arc sin, arc tang u. s. w. geschrieben, nicht etwa Arc Tang u. s. w.

§. 12. In den letztern Ausdrücken, jedes a und b auf $=1$ eingeschränkt, gibt die ersten Ausdrücke, in welchen übrigens dann $\mathfrak{x}$ statt x geschrieben steht.

Mit Ausnahme des Tangenten-Integrales, in welchem $\mathfrak{x}$ oder x jeden bejahten oder verneinten Werth haben kann, weil ja $\mathfrak{x}$ oder $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\, x$ eine Tangente für den Halbmesser 1 bedeutet (solche Tangente aber für den bejahten ersten Quadranten jeden Werth von o bis $+\infty$, für den ersten verneinten Quadranten jeden Werth von o bis $-\infty$ haben kann), sind dagegen die $\mathfrak{x}$ und x in den übrigen 6 Integranden auf gewisse Werthe eingeschränkt, wenn das ihnen zugehörige Bogen-Integral ein mögliches seyn soll.

§. 13. Nehmen wir die zweite Gleichung $\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bxx)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc sin } x \sqrt{\frac{b}{b}}$ vor Augen: so ersehen wir aus ihrer linken Seite, dafs für jeden Werth des x, bei welchem $bxx > a$ sich ergeben würde, das Integrand (das zu integrirende Differential) selbst schon, wegen der unmöglichen Wurzeln, eine **algebraisch** unmögliche Gröfse seyn würde. In der rechten Seite wird dann diese Unmöglichkeit auch **trigonometrisch** bestätigt, weil aus $bxx > a$

folgt, daſs $x\,\sqrt{\frac{b}{a}} > 1$ seyn würde; mit dem Begriffe einer Sinuszahl aber es durchaus im Widerspruche steht, dieselbe gröſser als 1 zu verlangen. Und eben so wird bei den übrigen Gleichungen, die algebraische Unmöglichkeit der linken Seite, und die trigonometrische der rechten Seite, allemal mit einander übereinstimmend erkannt werden; man mag nun von den sämmtlichen nebeneinander aufgeführten Ausdrücken wählen, welchen man will.

In dieser Aufführung habe ich durchaus Herrn Meier Hirsch in seinen Integraltafeln, Berlin 1810, Seite 47, befolgt. Diese Tafeln sind ja mit so vieler Einsicht und Umsicht geordnet, und mit solcher Sorgfalt berechnet, daſs es rathsam ist, besonders auch den praktischen Mathematiker dahin einzuleiten. Namentlich in diesem und dem nächstfolgenden Kapitel, habe ich auch meinen Vortrag anders als gewöhnlich, dahin gerichtet, daſs meinen Lesern der Gebrauch dieser Tafeln erleichtert werde.

§. 14. Da nach diesen Aufführungen jedes Integral, durch jede von den 8 trigonometrischen Hülfslinien ausgedrückt ist: so war es um so weniger nöthig, neben dem $+1.\int\varphi$ auch das $-1.\int\varphi$ fernerhin aufzuführen; und so erhellet es um so deutlicher, daſs aus den 8 trigonometrischen Differentialen, Diff. R. IX. §. 25, nicht mehr als folgende 4 Fälle $\int(a+bx^2)^{-1}\,dx$, $\int(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$, $\int(-a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}x^{-1}\,dx$ und $\int(a-bx)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ des allgemeinen $\int(a+bx^n)^p x^m\,dx$, durch trigonometrische Tafeln integrirbar gefunden sind. Nur eine scheinbare, und im Ganzen genommen nicht rathsame Verdoppelung dieser Fälle, ist durch die Gewohnheit entstanden, z. B. neben dem obigen $1.\int(a+bx^2)^{-1}\,dx$, auch noch aufzuführen, was nach unserer obigen Darstellung nichts anders als $=-1.\int(a+bx^2)^{-1}\,dx$ ist, und seyn kann.

1.

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{1+\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \text{arc tang } \mathfrak{x}$$

$$= \text{arc sin} \sqrt{\frac{\mathfrak{x}^2}{1+\mathfrak{x}^2}} = \frac{1}{2} \text{ arc sin } \frac{2\mathfrak{x}}{1+\mathfrak{x}\mathfrak{x}}$$

$$= \text{arc cos} \sqrt{\frac{1}{1+\mathfrak{x}^2}} = \frac{1}{2} \text{ arc cos } \frac{1-\mathfrak{x}\mathfrak{x}}{1+\mathfrak{x}\mathfrak{x}}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc sin vers } \frac{2\mathfrak{x}^2}{2+\mathfrak{x}^2} = \text{arc cot } \frac{1}{x}$$

$$= \text{arc sec} \sqrt{\frac{1+\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{x}^2}} = \frac{1}{2} \text{ arc sec } \frac{1+\mathfrak{x}^2}{1-\mathfrak{x}^2}$$

$$= \text{arc cosec} \sqrt{\frac{1+\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{x}^2}} = \frac{1}{2} \text{ arc cosec } \frac{1+\mathfrak{x}^2}{2\mathfrak{x}}$$

$$\int \frac{dx}{a+bxx} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc tang } x \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc sin} \sqrt{\frac{bx^2}{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \text{ arc sin } \frac{2x\sqrt{ab}}{a+bx^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc cos} \sqrt{\frac{a}{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \text{ arc cos } \frac{a-bx^2}{a+bx^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \text{ arc sin vers } \frac{2bx^2}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc cot } \frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc sec} \sqrt{\frac{a+bx^2}{bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \text{ arc sec } \frac{a+bx^2}{a-bx^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc cosec} \sqrt{\frac{a+bx^2}{bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \text{ arc cosec } \frac{a+bx^2}{2x\sqrt{ab}}$$

2.

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \text{arc sin } \mathfrak{x}$$

$$= \text{arc cos} \sqrt{\frac{1-\mathfrak{x}^2}{1}} = \frac{1}{2} \text{ arc cos } \frac{1-2\mathfrak{x}^2}{1}$$

$$= \text{arc tang } \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}^2)}} = \text{arc cot } \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{x}^2)}}{\mathfrak{x}}$$

$$= \text{arc sec} \sqrt{\frac{1}{1-\mathfrak{x}^2}} = \text{arc cosec} \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{x}^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc sin vers } \frac{2\mathfrak{x}^2}{1}$$

1*.

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}}$$

$$= -1\,\frac{1}{2}\log\frac{1-\mathfrak{x}}{1+\mathfrak{x}}$$

und $\int \frac{d\mathfrak{x}}{-1+\mathfrak{x}\mathfrak{x}}$ mufs $= -1\int\frac{d\mathfrak{x}}{1-\mathfrak{x}\mathfrak{x}}$ seyn.

$$\int \frac{dx}{a-bxx} = \frac{1}{2\sqrt{ab.}}\log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{(a-bx^2)}}$$

und $\int\frac{dx}{-a+bxx}$ ist $= -\int\frac{dx}{a-bxx}$.

Für diese sämmtlichen Ausdrücke in 1 und 1* ist die Constante $= 0$, wenn das Integral mit $\mathfrak{x}$ oder x seinen Anfang nehmen soll.

2*.

$$\int\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\pm 1+\mathfrak{x}^2)}} = \log\left[\mathfrak{x}+\sqrt{(\pm 1+\mathfrak{x}^2)}\right] + \text{Const.}$$

Soll dieses Integral mit $\mathfrak{x} = 0$ seinen Anfang haben: so mufs die Const $= -\log\sqrt{\pm 1}$ seyn; bei gegebnem $+1$ also $= 0$. Bei gegebnem -1 aber ist sie unmöglich.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc sin } x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc cos} \sqrt{\frac{a-bx^2}{a}} = \frac{1}{2\sqrt{b}} \text{ arc cos} \frac{a-2bx^2}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc tang} \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{(a-bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc cot} \frac{\sqrt{(a-bx^2)}}{x\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc sec} \sqrt{\frac{a}{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc cosec} \sqrt{\frac{a}{bx^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}} \text{ arc sin vers} \frac{2bx^2}{a}.$$

3.

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{x\sqrt{(-1+\mathfrak{x}^2)}} = \text{arc sec } \mathfrak{x}$$

$$= \text{arc tang} \sqrt{(\mathfrak{x}^2-1)} = \text{arc cot} \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{x}^2-1}}$$

$$= \text{arc cosec} \frac{\mathfrak{x}}{\sqrt{(\mathfrak{x}^2-1)}} = \text{arc sin} \frac{\sqrt{(\mathfrak{x}^2-1)}}{\mathfrak{x}}$$

$$= \text{arc cos} \frac{1}{\mathfrak{x}} = \frac{1}{2} \text{ arc cos} \frac{2-\mathfrak{x}^2}{\mathfrak{x}^2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc sin vers} \frac{2(\mathfrak{x}^2-1)}{\mathfrak{x}^2}$$

Für jedes $\mathfrak{x} < 1$ würde sogleich das vorgegebne Integrand eine unmögliche Gröfse seyn; womit übereinstimmt, dafs keine Secante kleiner, als der Halbmesser seyn kann.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(-a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc sec } x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc tang} \sqrt{\frac{bx^2-a}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc cot} \sqrt{\frac{a}{bx^2-a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc cosec} \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{(bx^2-a)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc sin} \frac{\sqrt{(bx^2-a)}}{x\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ arc cos} \frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ arc cos} \frac{2a-bx^2}{bx^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ arc sin vers} \frac{2(bx^2-a)}{bx^2}$$

Hier ist $\mathfrak{x} = x\sqrt{\frac{b}{a}}$, welches also nur für solche Werthe des x, bei welchen $x\sqrt{\frac{b}{a}}$ nicht kleiner als 1 ist, mögliche Integrale geben kann.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\pm a + bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \log\left[x\sqrt{b} + \sqrt{(\pm a + bx^2)}\right] + \text{Const.}$$

Soll dieses Integral mit $x = 0$ seinen Anfang haben: so muſs die Constante $= -\frac{1}{\sqrt{b}} \log \sqrt{\pm a}$ seyn; die also bei gegebnem $-a$ eine unmögliche Gröſse ist. Bei gegebnem $+a$ ist diese Const $= -\frac{1}{\sqrt{b}} \log \sqrt{a}$, also $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log\left[x\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\left(1 + x^2\frac{b}{a}\right)}\right]$.

3*.

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}\sqrt{(1+\mathfrak{x}^2)}} = \log \frac{\sqrt{(1+\mathfrak{x}^2)} - 1}{\mathfrak{x}} + C$$

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}\sqrt{(1-\mathfrak{x}^2)}} = \log \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{x}^2)} - 1}{\mathfrak{x}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{(a+bx^2)} - \sqrt{a}}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{(a+bx^2)} - \sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx^2)} - \sqrt{a}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{(a+bx^2)} - \sqrt{a}}{x} + C$$

Diese Ausdrücke sind bei einem verneinten a allgemein unmöglich; bei einem bejahten a wird ihre Möglichkeit und Unmöglichkeit aus dem + und − des logarithmisirten Bruches bestimmt.

4.

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(2\mathfrak{x}-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \text{arc sin vers } \mathfrak{x}$$
$$= \text{arc cos } (1-\mathfrak{x})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax-bxx)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc sin vers } \frac{2bx}{a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc cos } \frac{a-2bx}{a}$$

---

§. 16. Die logarithmischen Integrale, welche auf Seite 145 und 147 als Gegenstücke der trigonometrischen aufgeführt stehen, wird man in den nächstfolgenden Kapiteln sämmtlich erwiesen finden. Indem sich dann unter den andern dort erwiesenen logarithmischen Integralen auch mehre solche ergeben, durch welche noch andere als die in §. 14. aufgeführten 4 Fälle des $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ logarithmisch genau integrirt werden; so wird eben dadurch die Frage veranlafst, ob nicht neben diesen neuen Fällen, wiederum auch solche aufzustellen seyn möchten, welche ein trigonometrisch mögliches Integral geben, wo das logarithmische, nicht ohne unmögliche Gröfsen sich würde aussprechen können.

§. 17. Da nun diejenigen Unmöglichkeiten, welchen man durch Auswahl zwischen einem trigonometrischen und logarithmischen Integrale zu entgehen vermag, durch das $\mp$ im gegebnen a und b bestimmbar sind: so ist es allerdings nicht selten der

4*.

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(2\mathfrak{x}+\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \log(1+\mathfrak{x}+\sqrt{(2\mathfrak{x}+\mathfrak{x}\mathfrak{x})}) + C$$

wo $-\log 1$ also -0 die Constante ist, bei welcher mit $\mathfrak{x} = 0$ das Integral seinen Anfang nimmt.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+bx^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \log [a+2bx+2\sqrt{b}\sqrt{(ax+bx^2)} - \log a]$$

wo sich sogleich $-\frac{\log a}{\sqrt{b}}$, als die Constante ergeben hat, bei welcher mit $x = 0$ das Integral seinen Anfang nimmt.

Fall, daſs man beiderlei Integrale ausdrückt findet, als ob jedesmal ein $+a$ und $+b$, namentlich auch in dem $\int (a+bx^n)^p x^m dx$ gegeben wäre, und man erst bei der Anwendung, zwischen beiden Formeln, der trigonometrischen und der logarithmischen, zu wählen hat.

So wird man in den Integraltafeln der Herrn Meier Hirsch, Seite 47,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}}$$

mit der Anweisung aufgeführt finden, daſs man von diesen beiden Ausdrücken, für ein gegebnes $+b$ den ersten, für ein gegebnes $-b$ den zweiten Ausdruck gebrauchen müsse, wenn man, so weit es möglich ist, mit lauter möglichen Gröſsen zu thun haben wolle; welches er bei seinen aus diesen Formeln hergeleiteten Tafeln mit Recht vorausgesetzt hat.

Für die Integranden 2 und 2* wird von ihm Seite 141

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log [(x\sqrt{b}+\sqrt{(a+bx^2)})] + C$$

$$\text{und} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{arc sin } x\sqrt{-\frac{b}{a}} + C \text{ angesetzt;}$$

von welchen beiden Ausdrücken, wiederum der erste für ein gegebnes bejahtes b, der zweite für ein gegebnes verneintes b die meisten möglichen Gröſsen einliefert.

Aus denselben Gesichtspuncten wird man auch dessen übrige Aufstellungen zu beurtheilen und gehörig zu verstehen wissen; welche mir für den Gebrauch weit bequemer scheinen, als was man sonst, wegen des Zeichenwechsels, bald so, bald anders, aufzuführen pflegte.

Absichtlich habe ich übrigens für das Integrand $\int \frac{dx}{1+xx}$ (also für das obige $\int \frac{dx}{a+bxx}$ mit gegebnem $a = 1$, und $b = 1$) schon in Diff. R. XIII. §. 5. u. f. es deutlich dargelegt, warum man nur für $1+xx$ durch mögliche Tangenten, und nur für $1-xx$ durch mögliche Logarithmen sich ausdrücken kann.

Neuntes Capitel.

Logarithmische Integrirung.

§. 1. Wollte man $\int \frac{dy}{y}$, durch irgend eine von den algebraischen Integrirungsregeln zu finden suchen: so müſste es als $= \int y^{-1}\, dy$, sogleich der ersten Hauptregel, Cap. I. §. 12., unterworfen werden, also $= \frac{y^0}{0}$ geben. Ein unschickliches Resultat! weil ja $y^0 = 1$ eine constante Gröſse ist, und als solche (sie mag nun bloſs einmal, oder $\frac{1}{0}$ mal, das ist, ∞ mal sollen genommen werden) mit einem Differentiale nicht belegt werden kann; daher es hiemit schon gewiſs geworden ist, daſs aus dem vorgegebnen Differential $\frac{dy}{y}$ auf die demselben zugehörige Integral-Function, vermittelst einer algebraischen Integrirungsregel nicht geschlossen werden kann.

Da es nun ferner bei den algebraischen Differenziirungsregeln schon für unschicklich anerkannt werden muſste, die bloſse Scheinfunction y^0, dessen Exponent, in einem algebraischen y^n schlechterdings nichts anders als ein einzeler Werthfall eines constanten n seyn könnte, mit einem Differentiale belegen zu wollen; auch wenn man es gleichwol thun wollte, der algebraische Differentialquotient $\frac{d.y^n}{dy} = ny^{n-1}$ sich $= \frac{0}{y} = 0$ ergeben, und somit auf die Frage nach diesem Quotienten die Antwort erfolgen würde, daſs er für jedes y ein Nichts sey: so ist es auch von dieser Seite her gewiſs, daſs über-

haupt $\frac{dy}{y}$ als **Differential** einer **algebraischen** Function gar nicht vorkommen, durch Differenziirung irgend einer algebraischen Function, als einer solchen, niemals entstanden seyn kann.

§. 2. Wenn wir dagegen die transcendente Function $y = b^z$ mit einer zwar constanten Stammgrösse, aber einem veränderlichen Exponenten z in Anspruch nehmen: so muſs ihre belegte Gröſse $y^1 = b^{z+dz} = b^z b^{dz}$, also ihr Differential $dy = b^z b^{dz} - b^z = b^z (b^{dz} - 1) = y (b^{dz} - 1)$, und ihr Differentialquotient $\frac{dy}{dz} = y \frac{b^{dz} - 1}{dz}$ seyn.

§. 3. Da nun wegen $y = b^z$, der Exponent $z = \text{Log } y$ seyn, nämlich z den Logarithmen des y in demjenigen Systeme ausmachen muſs, dessen Basis die gegebne constante Gröſse b ist, allemal aber, a die Subtangente dieses Systemes bedeutend, $\frac{b^{dz} - 1}{dz} = \frac{1}{a}$ gibt (Diff. R. X. §. 9.): so haben wir hiemit die Gleichung $\frac{dy}{d\,\text{Log}\,y} = \frac{y}{a}$, folglich auch die Gleichung $\frac{dy}{y} = \frac{d\,\text{Log}\,y}{a}$ erhalten; aus welcher allerdings gefolgert werden kann, daſs jedes $\int \frac{dy}{y} = \frac{\text{Log}\,y}{a}$ seyn muſs, indem wir die dabei noch unbestimmt bleibenden constanten Gröſsen, für jetzt noch dahin gestellt seyn lassen.

§. 4. Für $b = 10$ ist $z = \text{Log Briggii}\; y = \log y$, und in diesem Briggischen Systeme die Subtangente $a = 0{,}434293\ldots$, also $\int \frac{dy}{y} = \frac{\log y}{0{,}43429\ldots}$

Soll die Subtangente $a = 1$ seyn, so muſs die Basis $b = h = 2,7182828...$ genommen werden, also, wegen $y = h^z$, nun $z = \text{Log nat } y = \text{log } y$, und demnach $\int \frac{dy}{y} = \text{log } y$ seyn.

§. 5. Vermittelst des Calculs in §. 2. können auch Anfänger es deutlich einsehen,

wie das allgemeine $\frac{dy}{y} = \frac{d \operatorname{Log} y}{a}$ durch Differenziirung des $y = b^z$,

eben so aber $\frac{dy}{y} = \frac{d . \log y}{0,43429...}$ durch Differenziirung des $y = 10^z$,

und eben so $\frac{dy}{y} = \frac{d \text{ log } y}{1}$ durch Differenziirung des $y = h^z$ sich ergeben muſs.

Es ist nützlich, dieses aus den angeführten Differenziirungen unmittelbar zu ersehen, und aus denselben auf die logarithmische Integrirungsregel

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{\operatorname{Log} y}{a} = \frac{\log y}{0,43429...} = \frac{\text{log } y}{1}$$

zu schlieſsen, ohne hierbei einer unbeschränkten Conversion (*conversionis simplicis*) nöthig zu haben, wie sie eigentlich erfordert wird, wenn man in der Kürze schlieſst: weil jedes $d \text{ log } y = \frac{dy}{y}$, ist, so muſs (jedes) $\int \frac{dy}{y} = \text{log } y$ seyn.

Die Integral-Constante betreffend.

§. 6. Da alle Integrirungsregeln (namentlich also auch die logarithmischen eben sowohl, wie die algebraischen) aus einem vorgegebnen Differential diejenige Function sollen finden lehren, welcher dieses Differential zugehören würde; irgend

ein Differential aber, etwas anderes, als die veränderlichen Endgränzen einer Function uns anzugeben, seiner ganzen Natur und Absicht nach nicht vermögen kann und soll: so ist es allgemein gewifs, dafs durch irgend eine Integrirungsregel, sie mag nun algebraisch, oder logarithmisch, oder trigonometrisch, oder anderweitig transcendent seyn, etwas anderes für die dadurch gefundenen Functionen unmittelbar nicht bestimmt werden kann, als was man aus den veränderlichen Endgränzen dieser Function für sich betrachtet, zu folgern vermag; alles dasjenige dagegen, was überdies von ihrer Anfangsgränze abhängig ist, durch anderweitige Schlüsse noch beigebracht werden mufs.

§. 7. Wenn wir z. B. für ein vorgegebnes Integrand $\int X^n dX$, die algebraische Integrirungsregel $\int X^n dX = \frac{X^{n+1}}{n+1}$ benutzt haben, durch (X) aber alle diejenigen Functionen andeuten wollen, welche dieser Integrirungsregel unterworfen sind; so sind diese sämmtlichen $(X) = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C$, in Hinsicht ihres constanten Gliedes C, so völlig unbestimmt, dafs dieses C sowohl eine jede bejahte, als jede verneinte Gröfse nicht nur (unter diesen also auch ein ∓ 0 oder $\mp \infty$), sondern überdiefs noch jede unmögliche Gröfse bedeuten kann und mufs. Da nun eben hieraus einleuchtet, dafs auch für jeden einzelen Werthfall des x, z. B. für $x = a$, durch die Gleichung $\overset{x=a}{(X)} = \frac{\overset{x=a}{X^{n+1}}}{n+1} + C$, über den wirklichen Ertrag dieses $\overset{x=a}{(X)}$, wegen der Unbestimmtheit des C, nichts bestimmt wird, auch diese Unbestimmtheit

sehr natürlich ist, weil man über den Gröfsen-Ertrag einer Function völlig ungewifs bleiben mufs, so lange man lediglich aus den veränderlichen Endgränzen einer Functiou gefolgert, ihre Anfangsgränze aber unbestimmt gelassen hat: so ist es eben so einleuchtend, dafs man irgend eine Anfangsgränze für die Functionen (X) festgesetzt haben mufs, wenn man irgendwo von dem Gröfsen-Ertrage eines solchen Integrales, bei irgend einem einzelen Werthfalle seines x, Gebrauch zu machen verlangt.

§. 8. Unter denen, in Hinsicht ihres Gröfsen-Ertrages noch völlig unbestimmten $(X) = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C$, werde nun durch $\left((X)\right)$ diejenige angedeutet, welche wir der verlangten Anwendung zugehörig finden: so mufs und kann diese Brauchbarkeit oder Zueignung lediglich darin begründet seyn, dafs diese $\left((X)\right)$ für einen gewissen Werthfall $x = a$, gerade diejenige Gröfse A gibt, welche bei der Anwendung für diesen Werthfall des x, vorhanden seyn mufs. Denn selbst auch, wenn wir aus der Aufgabe, auf welche wir eines von den (X) anzuwenden haben, einsehen, dafs es dasjenige $\left((X)\right)$ seyn mufs, welches mit dem Werthfalle $x = a$ seinen Anfang nimmt: so heifst das ja nichts anders, als dasjenige $\left((X)\right)$ verlangen, welches für $x = a$ die Gröfse $A = 0$ ausmacht.

Mufs demnach die Auswahl des $\left((X)\right)$ unter den sämmtlichen $(X) = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C$ allemal da-

durch bestimmt werden, daſs wir $\overset{x=a}{\Big((X)\Big)} = A$ verlangen: so ist eben dadurch gewiſs, daſs $A = \overset{x=a}{\dfrac{X^{n+1}}{n+1}} + C$,

folglich die Constante $C = A - \overset{x=a}{\dfrac{X^{n+1}}{n+1}}$,

also $\Big((\mathfrak{X})\Big) = \dfrac{X^{n+1}}{n+1} + A - \overset{x=a}{\dfrac{X^{n+1}}{n+1}}$ seyn muſs.

Wird dieses $A = o$ verlangt: so haben wir sehr einfach $\Big((\mathfrak{X})\Big) = \dfrac{X^{n+1}}{n+1} - \overset{x=a}{\dfrac{X^{n+1}}{n+1}}$

Oder wird $a = o$ verlangt, so hat man

$$\Big((\mathfrak{X})\Big) = \frac{X^{n+1}}{n+1} + A - \overset{x=a}{\frac{X^{n+1}}{n+1}}$$

Ergibt sich dabei, aus Betrachtung dessen, was man aus der Ausgabe an sich schon ersehen kann, daſs dabei auch $A = o$ seyn muſs:

so hat man $\Big((\mathfrak{X})\Big) = \dfrac{X^{n+1}}{n+1} - \overset{x=a}{\dfrac{X^{n+1}}{n+1}}$

Und ist nun überdies die Function X so beschaffen, daſs sie $\overset{x=a}{\dfrac{X^{n+1}}{n+1}} = o$ ergibt: so hat man $\Big((\mathfrak{X})\Big) = \dfrac{X^{n+1}}{n+1} + o$, mit der Constante o. Ohne Constante, zu sagen, verstöſst gegen den Satz, daſs der Function (X) eine bestimmte Anfangsgränze zugeeignet seyn muſs, wenn sie einen bestimmten Gröſsen-Ertrag gewähren soll.

Hiemit sind nun meines Erachtens allgemein und richtig die Gründe vor Augen gelegt, durch welche, bei algebraisch aufgefundenen Integralen, ihr constantes Integral-Glied C bestimmt wird.

§. 9. Wenn wir dagegen durch die logarithmische Integrirungsregel $\int \frac{dy}{y} = \log y$ zuvörderst auf alle diejenigen Functionen (Y) zu schliefsen verlangen, denen das vorgegebene Differential $\frac{dy}{y}$ zukommen könne: so ist es allerdings wohl gewifs, dafs diese sämmtlichen (Y) ein (Y) $= \log y + C$ seyn müssen; auch, da dieses C eine dem $\log y$ additive Gröfse, also selbst auch ein Logarithme seyn mufs, in dieser Hinsicht allemal (Y) $= \log y + \log c = \log cy$ angesetzt werden könne; wird aber hier sogleich ein den logarithmischen Integralen eigenthümlicher Umstand zu beachten seyn, dafs das vorgegebene Differential $\frac{dy}{y}$, nicht blofs $= \frac{1 \cdot dy}{1 \cdot y}$, sondern auch $= \frac{b\,dy}{b\,y}$ seyn würde, und Falls b ein constanter Factor ist, auch $\frac{dy}{y} = \frac{d \cdot by}{by}$ seyn würde; folglich von dem vorgegebnen Differential $\frac{dy}{y}$ selbst schon es ungewifs seyn kann, ob es das Differential eines $1 . \log y$, oder eines $b . y$ gewesen sey, oder auch bei seiner Anwendung etwa ausmachen solle oder müsse!

§. 10. Wenn wir nun in dieser Hinsicht (Y) $= \log y + \log b = \log by$ ansetzen: so ist damit ganz richtig angedeutet, dafs der Factor b jede beliebige constante Gröfse seyn solle; aber lediglich

darum schon eine beliebige Constante ausmacht, weil sogleich die Angabe der veränderlichen Endgränzen, eben sowohl einem $b.\log y$, als einem $1.\log y$ zugehören würde, ohne dafs dabei schon an irgend eine constante Anfangsgränze des (Y) zu denken gewesen wäre.

§. 11. Daher werden wir ferner in Hinsicht der constanten Anfangsgränze noch eine zweite constante $K = \log k$ hinzuzufügen haben, und behaupten müssen, dafs aus einem vorgegebnen $\int \frac{dy}{y}$, durch die Integrirungsregel $\int \frac{dy}{y} = \log y$, an sich allein genommen, für die dem $\frac{dy}{y}$ zugehörigen Functionen (Y) ein mehres nicht bestimmt werde, als dafs diese Functionen

$$\text{ein (Y)} = \log y + \log b + \log k = \log y + \log b k,$$

mit irgend einem constanten b und irgend einem constanten k seyn müssen.

§. 12. Allerdings ist es nun hiemit auch gewifs, dafs das Product bk selbst, irgend eine constante Gröfse c seyn müsse, und man daher auch einfacher sogleich ansetzen kann, dafs jedes (Y)

$$\text{ein (Y)} = \log y + \log c = \log c y,$$ oder wie man noch kürzer anzusetzen pflegt,

$$\int \frac{dy}{y} = \log y + \log c = \log cy \text{ seyn müsse.}$$

Indessen war es wohl der Mühe werth, dieses constante c als ein Product aus zwei constanten Factoren b und k kennen zu lernen, von denen der eine in der Unbestimmtheit des vorgegebnen Differentiales $\frac{dy}{y} = \frac{1.dy}{1.y} = \frac{d.by}{by}$ begründet, der an-

dere aber von der noch unbestimmt gelassenen Anfangsgränze des (Y) abhängig ist. Besonders bei solchen Integralen, in welchen Functionen von verschiedener Transcendenz zusammen treffen, können uns ihre Constanten gar beträchtliche Schwierigkeiten verursachen. Auf deutlichem und sicheren Wege darüber auf's Reine zu kommen, ist doch wohl das einzige Mittel, dafs man die Bestandtheile dieser Constanten, in so fern sie von verschiedenen Gründen abhängig sind, als solche unterscheiden lernt; und die logarithmischen schienen mir vorzüglich geeignet, auch Anfänger auf ihre Zerlegung aufmerksam zu machen, und mit den algebraischen sie zu vergleichen.

§. 13. Gesetzt, wir wären in Hinsicht der aufzufindenden logarithmischen Constante $c = bk$, durch Betrachtung der Aufgabe, für welche wir das Integral anzuwenden haben, über das $b$fache ihres y gewifs geworden: so würden wir eben dadurch wissen, dafs ihr anderer von der Wahl der Anfangsgränze abhängiger Factor $k = \frac{c}{b}$ seyn müsse; und umgekehrt werden die b nach gewählter Anfangsgränze auf lauter $b = \frac{c}{k}$ mit bereits bestimmtem k eingeschränkt seyn. Und je mehr es nun einmal so ist, und so seyn mufs, dafs man bei dem Gebrauche der Integralmethode gar häufig auf ganz neue und unbekannte Transcendenzien trifft, um so wichtiger ist es, namentlich bei der sehr bekannten und sehr eigenthümlichen logarithmischen Transcendenz ihre Integralconstanten genau zerlegt zu wissen; wozu wir, wie es nun einleuchtend geworden seyn wird, in unserer genauen Betrachtung der ver-

änderlichen Endgränzen, eine sehr angemessene Hülfe gefunden haben.

§. 13. Die **Bestimmung** des constanten $\log c = \log bk$ im Ganzen genommen, wird nun ebenfalls wie bei der algebraischen Integralconstante, dadurch erhalten, daſs man unter den sämmtlichen $(Y) = \log y + \log c$, gerade dasjenige $\left((Y)\right)$ auffindet, welches für einen einzelen Werthfall $y = a$, gerade denjenigen Werth $= (A)$ gibt, welcher durch die vorliegende Aufgabe für diesen Werthfall statt finden muſs, oder doch mit Schicklichkeit gefordert werden kann.

Denn indem man dadurch weiſs,

daſs $\overset{y=a}{\left((Y)\right)} = \log a + \log c = (A)$ seyn muſs, oder seyn soll: so folgt daraus, daſs $\log c = \log a - \log A$, also $c = \frac{a}{A}$ seyn muſs.

§. 14. Hiemit liegt nun sogleich vor Augen, daſs wir den Fall, die logarithmische Constante $\log c = 0$ zu haben, durch ein $c = \frac{a}{A} = 0$, zu erreichen, auf das weiteste entfernt sind, indem vielmehr alsdann die Constante $\log c = \log 0 = \infty$ seyn müſste, und bei einer -0, wie bei jedem $-c$ eine unmögliche Gröſse seyn würde. Für $c = \frac{a}{A} = 1$ aber würden wir $\log c = \log 1 = 0$ erhalten.

§. 15. Auch ist es nun aus unsern obigen Erörterungen deutlich einzusehen, daſs bei Integralen, welche man durch die logarithmische Integrirungsregel aufzufinden hat, die Constante C, auch als ein

Gesammtresultat des b, als eines constanten Factors der veränderlichen Endgränzen, und des k als einer Folge aus der bestimmten Anfangsgränze des verlangten $\left((Y)\right)$ niemals etwas anders als einen bestimmten F a c t o r der Function ausmachen kann, auf irgend ein constantes, blofs additives oder subtractives Glied der Function aber schlechterdings keinen Einflufs haben kann; welches denn völlig damit übereinstimmt, dafs ja in dem logarithmischen vorgegebnen Differentiale $\frac{dy}{y}$, dessen Zähler dy freilich, als algebraisches Differential der Function y von dessen constanten Gliedern keine Spur in sich hat, der Nenner y aber die ganze Function y samt allen ihren constanten Gliedern s c h o n d a r g e s t e l l t, und mit i n d e n C a l c u l g e b r a c h t hat.

§. 16. Wenn aus einem mehrgliedrigen Differentiale, z. B.

aus $dX = A\,(x-a)^2\,dx + B\,x\,dx + D\,\frac{dx}{x}$

auf $X = \frac{A}{3}\,(x-a)^3 + \frac{B}{2}\,x^2 + D.\log x + C$

geschlossen ist, und man dasjenige (X) zu gebrauchen wünscht, welches mit $x = 0$ seinen Anfang nimmt: so würde

man $C = -\frac{A}{3}\,(-a)^3 - D\log 0 = \frac{A}{3}\,a^3 - D\log 0$

ansetzen, wegen des letzten logarithmischen Gliedes also mit einer unendlich grofsen Constante sich zu befassen haben.

Wüfste man statt dessen dasjenige (X) zu gegebrauchen, welches mit $x = 1$ seinen Anfang nimmt: so würde

man $C = -\frac{A}{2}\,(1-a)^3 - \frac{B}{2} - D.0$ haben.

Oder wüßte man dasjenige (X) zu gebrauchen, welches mit $x = a$ seinen Anfang nimmt, so würde man $C = -\frac{B}{2}a^2 - D \log a$,

also $(X) = \frac{A}{3}(x-a)^3 + \frac{B}{2}(x^2 - a^2) + D \log \frac{x}{a}$ haben.

Durch diese Unterscheidung zwischen den drei Theilen des constanten C sind wir also in den Stand gesetzt, namentlich auch den logarithmischen Theil für sich allein zu betrachten, und dafür besondere Maßregeln zu ergreifen; wobei uns dann auch die genauere Kenntniß des log o, wie sie in einem der letzten Kapitel aus Summirung einer harmonischen Reihe entwickelt wird, bisweilen gute Dienste leisten kann. Uebrigens erhellet nunmehr, warum ich schon in Kap. I. §. 31. erinnert habe, daß es rathsam sey, auf die einzelen Glieder der Constante C zu achten.

§. 17. Es wird nicht überflüssig seyn, auch von den hier sogenannten constanten Größen es noch besonders zu erinnern, daß sie zwar durch die ersten Buchstaben des Alphabetes, wie gewöhnlich, zum Besten der Anfänger bezeichnet sind, eigentlich aber nicht allemal ganz bestimmt gegebne, unveränderliche Größen zu seyn brauchen, sondern selbst auch sehr veränderliche Größen seyn können; nur daß ihre Veränderlichkeit von denjenigen Größen ganz unabhängig seyn muß, deren Veränderlichkeit bei dem gegebnen Differentiale, und dessen Integranden vorausgesetzt wird.

§. 18. Obgleich ich hoffen kann, daß meine hier mitgetheilten, ziemlich neuen Erörterungen über die Constanten bei algebraisch und logarithmisch integrirten Functionen, einleuchtend dargestellt

sind: so halte ich doch für rathsam, zum Besten der Anfänger, auch noch mancherlei nach der Regel $d \log y = \frac{dy}{y}$ aufgefundene Differentiale, in Hinsicht ihrer totalen und partialen Factoren vor Augen zu legen, um dabei zu bemerken, daſs der Factor b in der Integral-Constante bk allemal ein Total-factor der behandelten Function seyn muſs; weil nur ein solcher, indem er allgemeiner Multiplicator und zugleich allgemeiner Divisor des Differentiales war, aus dem Differentiale sich wegheben konnte; jeder Partialfactor in dem Differential-Ausdrucke, so gut wie jedes Glied der differenziirten Function vorhanden bleibt, er mag constant oder veränderlich seyn; jeder veränderliche Factor aber, der dem Zähler und Nenner des Differential-Ausdruckes gemeinschaftlich, sich wegheben konnte, gleichwohl eine constante Aufzählung seiner Dimensionen in dem Differentialausdrucke zurücklassen muſs.

§. 19. Im Allgemeinen werden von nun an lauter natürliche Logarithmen vorausgesetzt, weil sonst besonders die Betrachtungen über die Vieldeutigkeit des vorgegebnen Differentiales dadurch erschwert werden können, daſs man dann auch bedenken muſs, in welchen constanten Gröſsen die Subtangente a als Multiplicator oder Divisor enthalten seyn möchte! Und dieses ist nun eine Hauptursache, weſshalb die Analysten den Gebrauch der natürlichen Logarithmen für den allgemeinen Calcul so vorzüglich bequem befunden haben.

§. 20. Nach der Differenziirungsregel $d \log y = \frac{dy}{y}$ findet man, daſs

1) für $y = b - x$ sich $d\log y = -\dfrac{dx}{b-x}$

2) für $y = (b+x)^2$ sich $d\log y = 2\dfrac{b+x}{(b+x)^2}dx$,

auch $= 2\dfrac{dx}{b+x}$ ergibt;

3) für $y = cx$ sich $d\log y = \dfrac{c\,dx}{cx}$, auch $= \dfrac{dx}{x}$

4) für $y = c(fa+bx)$ sich $d\,l\,y = \dfrac{cb\,dx}{c(fa+bx)}$,

auch $= \dfrac{b\,dx}{fa+bx}$

5) für $y = c(a+x^2)^n$ sich $d\,l\,y = \dfrac{c.n(a+x^2)^{n-1}.2x\,dx}{c(a+x^2)^n}$

auch $= \dfrac{n.2x\,dx}{a+x^2}$

6) für $y = c^2(ax^n + b(a+x)^m)$

sich $dy = \dfrac{c^2}{c^2}.\dfrac{nax^{n-1}+mb(a+x)^{m-1}}{ax^n+b(a+x)^m}dx$

auch $= 1$.

7) für $y = c(ax^2+bx^3)^n$

sich $dy = \dfrac{c}{c}.\dfrac{n(ax^2+bx^3)^{n-1}.(2ax+3bx^2)\,dx}{(ax^2+bx^3)^n}$

auch $= n\dfrac{2ax+3bx^2}{ax^2+bx^3}dx$, auch $= n\dfrac{2a+3bx}{ax+bx^2}dx$ ergibt.

§. 21. I. Sogleich aus 1) und 2) liegt vor Augen, daſs sowol jedes veränderliche, als jedes constante Glied, es mag ein freies, wie x und b in 1), oder ein gebundenes, wie x und b in 2) seyn, auch in dem Ausdrucke des $d\log y = \dfrac{dy}{y}$ sich mit ergeben muſs.

II. Eben dadurch ist es schon gewiſs, daſs auch jeder veränderliche und unveränderliche Partial-

factor des y (das heifst, ein solcher, der nicht alle Glieder des y multiplicirt), ebenfalls im Ausdrucke des d log y allemal sich ergeben mufs, wie es auch für die Partialfactoren, f, b, x und a in 4) erhellet; desgleichen durch a, b und x in 7) erhellet; denn das dortige x^2 ist schon ein Totalfactor.

III. Jeder constante Totalfactor kann aus dem Ausdrucke des $\frac{dy}{y}$, weil er ein Totalfactor des Zählers und des Nenners bleibt, sich aufheben, wie es die Ausdrücke hinter auch, in 3) 4) u. s. w. darlegen, ohne eine bemerkbare Spur von sich zurück zu lassen.

IV. Von jedem veränderlichen Totalfactor X^n aber, X mag seyn, welche Function des x es will, mit einem constanten Exponenten n, kann zwar X^{n-1} aus dem Zähler und Nenner im Ausdrucke des $\frac{dy}{y}$ sich wegheben, der Exponent n aber mufs als ein Factor n, und somit als eine Spur zurückbleiben, aus welcher man schliefsen kann, dafs X^{n-1} sich weggehoben hat, wenn Zähler und Nenner nur noch X enthalten, wie es die letzten Ausdrücke in den 7 Beispielen darlegen; indem wir, für das 1ste Beispiel, bedenken, dafs $y = b - x$, als $y = (b-x)^1 . 1$ betrachtet, den Totalfactor $(b-x)^1$ hat, der die Spur 1 im Zähler des $\frac{dy}{y} = -1 . \frac{dx}{b-x}$ zurück läfst; für das auch in 7) noch bedenken, dafs hier x als Totalfactor der Stammgröfse, aus dieser besonders wegfallen konnte, indem er als x^n im Totalfactor $(ax^2 + bx^3)^n = ((ax + bx^2)x)^n$ mit enthalten war.

§. 22. Die Fundamentalregel des logarithmischen Integrirens ist nun, ebenfalls

durch natürliche Logarithmen ausgedrückt, dafs jedes $\int \frac{dy}{y} = \log y + \log c = \log cy$ ist, und durch die Constante $\log c = \log bk$ auch die Anfangsgränze der Function (Y) schon mit bestimmt seyn mufs.

Obgleich nun hierin unter y jede veränderliche Gröfse zu verstehen seyn soll: so wird es doch rathsam seyn, die beiden Fälle, dafs entweder $y = X$, oder $y = X^n$ seyn soll, besonders zu betrachten, und dafür die folgenden zwei Regeln aufzustellen.

Erste Regel.

§. 23. Da jedes $\frac{dX}{X}$ auch $= \frac{b\,dX}{bX}$ seyn kann, und unter dem Beding, dafs b ein constanter (oder doch mit X nicht veränderlicher) Factor sey, auch $b\,dX = d.bX$ ist: so kann man aus einem vorgegebnen Differential, als der veränderlichen Endgränze einer Function (X), die wir durch das Integriren zu finden verlangen, als allgemein gewifs nur schliefsen, dafs $\int \frac{dX}{X} = \log bX$, also auch $= \log X + \log b$ seyn mufs; wobei es also noch ungewifs bleibt, ob der Factor b gerade $= 1$ oder irgend eine andere constante Zahl sey.

Indem wir dann von diesen unendlich vielen, in Hinsicht ihres b noch völlig unbestimmten $(X) = \log bX$ irgend eines $\big((X)\big)$ zu gebrauchen verlangen, welches in Hinsicht seiner Anfangsgränze bestimmt sey: so wird durch diese Anfangsgränze freilich nur ein $\log k$ für die

Gleichung $\big((X)\big) = \log bX + \log k$ bestimmt werden.

Da nun aber auch

dieses $\left((X)\right) = \log X + \log b + \log k = \log X + \log bk$

ist: so kann man auch $\log bk = \log c$ schreiben; und gewifs seyn, dafs man sowohl das gehörige b als das gehörige k richtig bestimmt hat, wenn man durch

die Gleichung $\left((X)\right) = \log X + \log c$ das constante Product c dem verlangten $\left((X)\right)$ gemäfs zu bestimmen weifs.

Zweite Regel.

§. 24. Wenn n eine constante, mit X nicht veränderliche Gröfse ist: so mufs

$$\int \frac{n \cdot dX}{X} = \log X^n + \log c^n \text{ seyn.}$$

Erster Beweis.

§. 25. Da bei jedem constanten n allemal $\int \frac{n\,dX}{X} = n \int \frac{dX}{X}$ seyn mufs; nach der vorigen ersten Regel aber $\int \frac{dX}{X} = \log X + \log c$ ist: so mufs auch

$$\int n \cdot \frac{dX}{X} = n \int \frac{dX}{X} = n \log X + n \log c = \log X^n + \log c^n \text{ seyn.}$$

Zweiter Beweis.

§. 26. Da $\frac{n\,dX}{X}$ auch $= \frac{n\,X^{n-1}\,dX}{X^{n-1}\,X} = \frac{n\,X^{n-1}\,dX}{X^n}$ ist, in diesem letzten Ausdrucke aber dessen Zähler das Differential seines Nenners ausmacht, wenn n eine constante Gröfse ist: so mufs unter diesem Beding allerdings schon nach der allgemeinen Fundamental-

regel $\int \frac{dy}{y} = \log y + \log c$

auch $\int \frac{n\,dX}{X^n} = \int \frac{n\,X^{n-1}\,dX}{n^n} = \log X^n + \log c$; dieses $\log c$ aber dem $\log X^n$ gleichartig, auch als $\log c^n$ können angesetzt werden.

Dritter Beweis.

§. 27. Da in der allgemeinen Regel $\int \frac{dy}{y} = \log y + \log c$, die y jede beliebige Function von einer, oder auch mehren veränderlichen Functionen bedeuten soll: so muſs auch X^n statt ihrer substituirt werden können; und so muſs man ganz allgemein auch $\int \frac{d.X^n}{X^n} + \log c$ behaupten, auch wenn n selbst eine veränderliche Gröſse wäre.

Da aber $d.X^n = n X^{n-1}\,dx$ nur unter dem Beding eines mit X nicht veränderlichen Exponenten sich ergibt: so darf auch nur unter dieser Bedingung es behauptet werden,

daſs $\int \frac{d.X^n}{X^n} = \int n \frac{dX}{X} = \log X^n + \log c$ ist.

Anmerkung.

§. 28. Der dritte Beweis gibt wiederum ein Beispiel ab, welche Umsicht das Schlieſsen durch Substitutionen erfordert. Obgleich in der allgemeinen Regel $\int \frac{dy}{y} = \log y + \log c$ das y derselben jede veränderliche Gröſse, also auch X^z bedeuten kann: so durfte doch bei deren Benutzung für die zweite Regel nur X^n mit einem constanten n substituirt werden.

Der zweite Beweis legt es am deutlichsten vor Augen, wie der Factor X^{n-1} zur Wahrheit des Lehr-

satzes mitwirkend ist, obgleich er als $\frac{X^{n-1}}{X^{n-1}}$ sich gänzlich wegheben konnte. Der erste Beweis ist der kürzeste; und wenn es mir bloſs darum zu thun gewesen wäre, die zweite Regel aus der ersten durch calculatorischen Mechanismus abgeleitet zu wissen: so würde ich freilich die übrigen Beweise haben ersparen können. Aber auch hier war es mir darum zu thun, die Wirkungen des Calculs anschaulich erörtert zu haben.

§. 29. *Beispiele.*

1) $\int \frac{dx}{a+x} = \log(a+x) + \log c = \log c\,(a+x)$

$$\int -\frac{dx}{a+x} = -1\int \frac{dx}{a+x} = -\log(a+x) + \log c.$$
$$= \log \frac{c}{a+x}$$

2) $\int \frac{2\,dx}{a+x} = 2\int \frac{dx}{a+x} = 2\,[\log(a+x) + \log c]$
$$= \log(a+x)^2 + \log c^2$$

3) $\int \frac{dx}{3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}(\log x + \log c) = \log x^{\frac{1}{3}} + \log c^{\frac{1}{3}}$
$$= \log \sqrt[3]{cx}.$$

4) $\int \frac{m}{n}\frac{dx}{x} = \frac{m}{n}\int \frac{dx}{x} = \frac{m}{n}(\log x + \log c) = \log x^{\frac{m}{n}} + \log c^{\frac{m}{n}}$

5) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\int \frac{b\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log(a+bx)$

6) $\int \frac{2\,bx\,dx}{a+bx^2} \left(= \int \frac{dX}{X} = \log X\right) = \log(a+bx^2) + \log c$

7) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\,b}\int \frac{2\,bx\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\,b}\left\{\log(a+bx^2 + \log c)\right\}$

8) $\int\frac{6ax+3bm(a+x)^{m-1}}{ax^2+b(a+x)^m}.dx = 3\int\frac{2ax+bm(a+x)^{m-1}}{ax^2+b(a+x)^m}.dx$

$$\left(=3\int\frac{dX}{X}\right) = 3.\log(ax^2+b(a+x)^m)+3\log c$$

9) $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx)}} = \int(a+bx)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{b}\int(a+bx)^{-\frac{1}{2}}b\,dx$, ist hiemit der algebraischen Integrirungs-regel $\int X^n dX = \frac{X^{n+1}}{n+1}$ unterworfen, und gibt uns das Integral $= \frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{b}\sqrt{(a+bx)}$, also algebraisch genau; obgleich man aus der Form des Integranden eher einen logarithmisch genauen Ausdruck desselben hätte vermuthen mögen.

10) $\int\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)}} = \int\frac{(a+bx)^{-\frac{1}{2}}dx}{x} = \int\frac{(a+bx)^{-\frac{1}{2}}b\,dx}{a+bx-a}$

$$= \int\frac{(a+bx)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{(a+bx)}-\sqrt{a})(\sqrt{(a+bx)}+\sqrt{a})}$$

also $X = \sqrt{(a+bx)}$ bedeutend,

$$= \int\frac{2dX}{(X-\sqrt{a})(X+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\left(\frac{dX}{X-\sqrt{a}}-\frac{dX}{X+\sqrt{a}}\right)$$

$$= \int\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\log(\sqrt{(a+bx)}-\sqrt{a})-\log(\sqrt{(a+bx)}+\sqrt{a})\right\}$$

$$= \int\frac{a}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{(a+bx)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)x}+\sqrt{a}}.$$

Daſs dieses Integrand sich genau finden lasse, davon können wir sowohl durch die Ite als durch die Vte Reductionsgleichung in Cap. VII. §. 1. und §. 7. überzeugt werden. Da aber die unendlich groſsen Glieder dort durch ihre Form es andeuten, daſs das Integral logarithmisch seyn muſs: so war es rathsam, bei dessen anderweitiger Aufsuchung in logarithmischen Formen zu bleiben, und dazu nöthig,

die additive Hülfsgröfse $+ a - a = o$ in der ersten Zeile zu benutzen.

In Cap. XI. wird dasselbe Integral durch eine Specialregel gefunden werden. Weit mühsamer wird es gefunden, wenn man bedenkt, dafs dieses Integrand einer allgemeineren Form unterworfen ist, die man rationalisirt und dann integrirt hat. Allerdings hat diese Methode auch ihren besondern grofsen Werth, wo man mit Integranden zu thun hat, denen man unmittelbar noch nicht beizukommen weifs. Ich werde daher am Ende des Buches sie nachholen, wenn mir Raum dazu übrig bleibt. Rathsamer aber scheint es mir, alle uns nöthigen Integrale so geradezu, und so anschaulich als möglich aufzufinden.

11) $$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a+bx^2)}} = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(ax^{-2}+b)}} = \int (ax^{-2}+b)x^{-3}\, dx$$
$$= \frac{1}{-2a} \int (ax^{-2}+b)^{-\frac{1}{2}} . -2ax^{-3}\, dx, \text{ als ein } \int X\, dX$$
$$= \frac{1}{-2a} . \frac{2}{1} . (ax^{-2}+b)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{a}{x^2}+b\right)}$$
$$= -\frac{1}{ax} \sqrt{(a+bx^2)}$$

12) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{(ax+bx^2)}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(ax^{-1}+b)}} = \frac{1}{-a} \int (ax^{-1}+b)^{-\frac{1}{2}} . -ax^{-2}\, dx$$
$$= -\frac{2}{a} (ax^{-1}+b)^{\frac{1}{2}} = -\frac{2 . \sqrt{(ax+bx^2)}}{ax}$$

13) $$\int \frac{2 \sin \varphi\, d\varphi}{a - \cos \varphi} = \left(2 \int \frac{dy}{y} =\right) 2 \log(a - \cos\varphi) = \log(a - \cos\varphi)^2$$

13) $$\int \frac{d\varphi}{\operatorname{tang} \varphi} = \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{\sin \varphi} = \left(\int \frac{dy}{y} =\right) \log \sin \varphi.$$

§. 30. Unter den Hülfsmitteln, durch welche in diesen Beispielen die vorgegebnen Integranden der Integrirungsregel $\int \frac{dy}{y} = \log y$ unterworfen wurden, verdienen hier folgende aufgezählt zu werden.

1) Jedes $\int d.aX^n$, ist auch $= \int a d.X^n = a\int dX^n$ bei constantem a; folglich auch $= a\int n X^{n-1} dx = an\int X^{n-1} dx$, wenn n constant gegeben ist.

2) Folglich auch $\int \mathfrak{X} dx = \int \frac{F}{F} \mathfrak{X} dx = \frac{1}{F} \int F \mathfrak{X} dx$, wenn F einen constanten Hülfsfactor bedeutet, dergleichen wir z. B. in No. 5. benutzt haben.

3) Auch $\int \mathfrak{X} dx = \int x^h \frac{\mathfrak{X} dx}{x^h}$ gesetzt, muſs richtig bleiben, weil ja dieser Hülfsfactor $\frac{x^h}{x^h}$, eine bloſse Scheinfunction des x, bei allen noch so veränderlichen Werthen des x immerfort $= 1$ bleiben muſs, es mag nun der Exponent h nur irgend eine constante Gröſse seyn, wie es in den obigen Beispielen erfordert wurde, oder es mag auch h eine veränderliche Gröſse seyn sollen, wie es späterhin bei dem exponentialen Integriren gehörig angewandt, uns auch noch neue Integrirungsregeln gewähren dürfte.

§. 31. Welches constante F zu gebrauchen sey, um statt eines nicht integrabeln $\int \mathfrak{X} dx$ ein integrabeles $\int F \mathfrak{X} dx$ zu erhalten, wird meistens sehr leicht einzusehen seyn. Mehr Aufmerksamkeit ist nöthig, um für den Hülfsfactor $\frac{x^h}{x^h}$ den erforderlichen Werth seines h aufzufinden. In Betreff des allgemeinen binomischen Integranden $\int (a + bx^n)^p x^m dx$, welcher fernerhin vorzüglich von uns zu beachten ist, will ich darüber folgende zwei Regeln aufstellen, welche schon der Ansichten wegen, durch welche sie mir entstanden sind, auch den Anfängern verdienen mitgetheilt zu werden.

§. 32. Nachdem wir im Vten Kapitel diejenigen fünf Relationen zwischen den gegebnen drei Ex-

ponenten n, p und m, aufgefunden haben, von denen jede einzeln genommen, auch wenn sie nur allein vorhanden ist, uns schon gewiſs macht, daſs dergleichen Integrand algebraisch genau integrabel ist, die drei Exponenten mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen: so wird es nun sehr schicklich seyn, auch nach denen Relationen dieser drei Exponenten zu fragen, durch welche wir der logarithmischen Integrabilität dieses binomischen Integranden eben so allgemein vielleicht dürften versichert seyn können. (Ich sage, eben so allgemein! denn wenn wir einen oder den andern von diesen Exponenten noch besondern Einschränkungen unterworfen fordern: so kann dadurch das Integrand auf andere Weise algebraisch oder logarithmisch integrabel sich ergeben; namentlich durch die Zerlegung in Factoren, welche wir nachher erörtern werden.)

Sehr absichtlich habe ich unter jenen fünf Relationen, die eine, daſs $m = n - 1$ sey, die andere, daſs $m = - n(p+1) - 1$ sey, als die beiden ersten aufgeführt, und dann erst (r jede ganze bejahte Zahl bedeutend) 3) daſs $p = r$ sey, folgen lassen; weil auch die beiden dann noch übrigen nur dadurch brauchbar werden, daſs man, wo sie statt finden, ebenfalls, wie bei $p = r$, das Integral, obgleich mehrgliedrig, doch allemal durch eine endliche Anzahl von Gliedern dargestellt findet; und weil ich schon dort es bedachte, daſs es besonders bei dem logarithmischen Integriren rathsam sey, jene beiden ersten Relationen vor allen andern in Betracht zu nehmen.

In dieser Hinsicht ist es nun ferner gerathen, jene beiden ersten Relationen hier auf's neue, vermittelst des Hülfsfactors $\frac{x^h}{x^h} = 1$ zu erweisen;

indem dieselbe Hülfe dann auch sehr geschickt ist, sogleich auf die Relationen für das logarithmische Integriren ebenfalls schliefsen zu lassen.

§. 33. Jedes $\int (a + bx^n)^p x^m dx$ ist

$$= \int \left(\frac{a + bx^n}{x^h}\right)^p . x^m x^{hp} dx,$$

also auch $= \int (ax^{-h} + bx^{n-h})^p . x^{m+hp} dx$, folglich der algebraischen Integrirungsregel $\int X^p dX = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ unterworfen, wenn man vermittelst eines constanten F u. h sich $\frac{1}{F} \int (ax^{-h} + bx^{n-h})^p . Fx^{m+hp} dx$ dergestalt darstellen kann,

dafs $Fx^{m+hp} = -ahx^{-h-1} + b(n-h)x^{n-h-1}$ sey.

Dieses kann nun, wenn x nicht gänzlich aus dem Binomio wegfallen soll, nur auf zweierlei Weise Statt finden:

I) wenn man $h = 0$ nimmt, und dann $Fx^m = b(n-0)x^{n-1}$ haben kann, wozu also $m = n - 1$ gegeben seyn, und dann $F = bn$ gewählt werden mufs;

II) wenn man $n = h$ genommen hat, und dabei $F . x^{m+np} = -anx^{-n-1}$ sich verschaffen kann, wozu nun $m + np = -n - 1$, also $m = -n(p+1) - 1$ gegeben seyn, und $F = -an$ gewählt werden mufs.

§. 34. Sey nunmehr ferner die Frage, welche

$$\int (a + bx^n)^p x^m dx = \frac{1}{F} \int (ax^{-h} + bx^{n-h})^p Fx^{m+hp} dx,$$

indem sie dem obigen Falle I) $m = n - 1$, oder II) $m = -n(p+1) - 1$ nicht zugehören, dagegen als $\int \frac{x^m dx}{(a + bx^n)^{-p}} = \frac{1}{F} \int \frac{Fx^{m+hp} dx}{(ax^{-h} + bx^{n-h})^{-p}}$, der loga-

rithmischen Integrirungsregel
$\frac{1}{F} \int \frac{d \, . \, X^{-p}}{X^{-p}} = \frac{1}{F} \log X^{-p}$ unterworfen seyn würden:
so sehen wir sogleich, daſs dieses nur der Fall seyn kann, wenn wir vermittelst eines constanten F und h es dahin zu bringen wissen, daſs
$F x^{m+hp} = -p (ax^{-h} + bx^{n-h})^{-p-1} . (-ahx^{-h-1} + b(n-h) x^{n-h-1})$ sey.

Hiezu ist nun offenbar als Hauptbedingung erforderlich, daſs $-p = +1$ gegeben sey, damit der Exponent $-p-1 = 0$, also der verlangten Gleichung erste zwei Factoren $= +1 . (1) = 1$ sich ergeben; weil ja nur unter dieser Bedingung die linke Seite, für jeden Werth des veränderlichen x, der rechten Seite gleich gemacht werden kann. Indem nunmehr, nachdem $p = h$ schon bedungen ist, zu dieser Gleichmachung noch erfordert wird,
daſs $F . x^{m-h} = -ahx^{-h-1} + b(n-h) x^{n-h-1}$
also $F . x^{m} = -ahx^{-1} + b(n-h) x^{n-1}$ sich
ergebe: so wird dieses

1) bei $h = 0$ angenommen, geschehen, wenn $m = n - 1$ gegeben ist, und dann $F = bn$ angesetzt wird;

2) wird es bei $n - h = 0$, also bei $h = n$ angenommen, geschehen, wenn $m = -1$ gegeben ist, und $F = -an$ angesetzt wird.

§. 35. Nunmehr wissen wir also für jedes Integrand $\int (a + bx^n)^p x^m dx$, daſs es ohne Reihen-Entwickelung, algebraisch genau integrirbar (nach §. 33.) nur seyn kann, wenn es
entweder I) als $\int (a + bx^n)^p x^{n-1} dx$ gegeben ist,
also $= \frac{1}{nb} \frac{(a + bx^n)^{p+1}}{p+1}$ sich ergeben muſs, oder

wenn es II) als $\int(a+bx^n)^p x^{-n(p+1)-1}dx$ gegeben ist, also $= -\frac{1}{an(p+1)}\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p-1}$ sich ergeben muſs; und eben so obiges Integrand, ohne Reihen-Entwickelung logarithmisch genau integrirbar (nach §. 34.) nur seyn kann, wenn es entweder

1) als $\int\frac{x^{n-1}dx}{(a+bx^n)^1}$ gegeben $=\frac{1}{nb}\log(a+bx^n)$ ist,

oder

2) als $\int\frac{dx}{x(a+bx^n)^1}$ gegeben $=\frac{1}{an}\log\frac{a+bx^n}{x^n}$ ist.

§. 36. Nehmen wir nunmehr das Integrand $\int(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}x^{-2}dx$, das 11te Beispiel in §. 29. vor Augen, von welchem man vermuthen möchte, daſs es logarithmisch integrirbar sey: so sehen wir sogleich, daſs es weder dem Falle 1) noch dem Falle 2) zugehörig ist, dagegen aber, weil dessen $m=-2$, $p=-\frac{1}{2}$ und $n=2$ gegeben ist, allerdings dem algebraisch integrirbaren Falle II) $m=-n(p+1)-1$, wegen $-2=2(-\frac{1}{2}+1)-1$ unterworfen ist, also nach §. 33, durch den Hülfsfactor $x^h=x^n=x^{-2}$, und den Hülfsfactor $F=-an=-a.2$, zu finden seyn muſs. In der That ist dort, in §. 29, dieses Integrand dadurch integrirbar gemacht, daſs es sowohl mit $\frac{x^{-2}}{x^{-2}}$ als mit $\frac{-2a}{-2a}$ multiplicirt wurde. Dieses IIte Kriterium der algebraischen Integrirbarkeit ist immer schon bekannt gewesen, aber erst durch die obige neue Herleitung desselben vermittelst des Hülfsfactors x^h sind wir gesichert worden, nach dergleichen Hülfe nicht vergebens umher zu rathen, wo sie gar nicht Statt finden würde.

§. 37. Bedenken wir ferner, daſs auch in den beiden hiemit neu gefundenen Regeln 1) und 2) für das logarithmische Integriren, nicht nur a und b, sondern auch der Exponent n jede ganze oder gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl seyn kann: so sehen wir, daſs wir auch hiemit zwei sehr viel umfassende Integrirungen gefunden haben; zu welchen, um nur einige Beispiele aufzuführen, auch die unter (1) und (2) aufgestellten gehören.

(1)

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log (a+bx)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \log (a+bx^2)$$

$$= \frac{1}{b} \log \sqrt{(a+bx^2)}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3b} \log (a+bx^3)$$

$$= \frac{1}{b} \log \sqrt[3]{(a+bx^3)}$$

$$\int \frac{dx}{(a+b\sqrt{x})\sqrt{x}} = \frac{1}{b} \log (a+b\sqrt{x})$$

$$= \frac{b}{2} \log (a+b\sqrt{x})^2$$

und dergl. mehr.

(2)

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \log \frac{a+bx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = -\frac{1}{2a} \log \frac{a+bx^2}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{a} \log \frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^3)} = \frac{1}{3a} \log \frac{a+bx^3}{x^3}$$

$$= \frac{1}{a} \log \frac{\sqrt[3]{(a+bx^3)}}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x(a+b\sqrt{x})} = -\frac{2}{a} \log \frac{a+b\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{a} \log \frac{(a+b\sqrt{x})^2}{x}$$

und dergl. mehr.

§. 38. Algebraisch integrirbar ist nun jedes $\int(a+bx^n)^p x^m dx$, auch noch IIItens, wenn $p = r$ ist (Cap. V. §. 4), aber dann immer nur als $r+1$ einzele Integranden.

Da eben diese Vereinzelung auch bei der dortigen IVten und Vten Bedingung eintreten muſs: so werden überhaupt nur I) und II) die einzigen allgemeinen Relationen zwischen den drei Exponenten n, p und m seyn, durch welche uns so einfach ausgedrückte Integrale geliefert werden, daſs man in den oft erwähnten Integraltafeln andere Integranden auf jene zu reduciren für schicklich halten kann.

Eine ähnliche Vereinzelung der Integranden wird nun auch bei den rückständigen Bedingungen 3), 4) und 5), die man für die logarithmische Integrabilität aufsuchen könnte, ebenfalls eintreten müssen; und

übrigens scheint mir, was ich darüber aufgefunden habe, in denen Fällen, deren wir bedürftig werden könnten, zuvörderst auch durch die Zerlegung in Factoren abgereicht zu werden.

§. 39. Dieses allerdings sehr reichhaltige Hülfsmittel zum Integriren, habe ich gleichwol, namentlich auch in Hinsicht der binomischen Integranden, den bisher behandelten nachsetzen wollen, weil es auf solche n, p und m eingeschränkt ist, bei welchen man das vorgegebne Integrand in brauchbare Factoren zu zerlegen weiſs (nur auf brauchbare Factoren, nicht gerade auf algebraisch einfache [Diff. R. XXVI, §. 2,] brauchen wir uns einzuschränken).

Auch müssen ja bei dem Gebrauche dieser Zerlegungen, sowohl die bisher gelehrten algebraischen, als logarithmischen Integrirungsregeln, als schon bekannt vorausgesetzt werden. Hier aber muſs ich, wegen des übrigen, was als Fortsetzung dieses IXten Capitels im XIten Capitel noch beizubringen seyn wird, dieses Hülfsmittel schon aufgeführt haben.

Zehntes Capitel.

Integrale durch Zerlegung in Factoren gefunden.

§. 1. Im vorgegebnen Integranden $\int\frac{\mathfrak{Z}dx}{\mathfrak{N}}$, sey beispielsweise $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}=\frac{\mathfrak{E}x^4+\mathfrak{D}x^3+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{B}x+\mathfrak{A}}{\gamma x^2+\beta x+\alpha}$, also eine unächt gebrochene Function; weil das veränderliche x im Zähler $\mathfrak{Z}$ bis auf einen weniger hohen Grad, als in dem Nenner steigen müſste, wenn es eine ächt gebrochene Function seyn sollte. Wenn indessen eine solche Function rational ist, nämlich keine andere als ganze Dignitäten des x in ihr vorkommen: so kann man allemal mit ihrem Nenner in den Zähler so lange dividiren, bis die Ergänzung des bereits gefundenen Quotienten eine ächt gebrochene rationale Function ausmacht.

In dem vorliegenden Beispiele möchten die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, u. s. w. und α, β, γ seyn, welche constante Gröſsen sie wollen: so wird man durch Division dahin kommen können,

dieses $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}=Ex^2+Bx+\frac{\mathfrak{b}x+\mathfrak{a}}{\gamma x^2+\beta x+\alpha}$, mit lauter constanten, sämmtlich durch die gegebnen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... und α, β, γ bestimmten Coefficienten E, B und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ gefunden zu haben. Da nun

im $\int\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}}dx=\int Ex^2dx+\int Bxdx+\int\frac{\mathfrak{b}x+\mathfrak{a}}{\gamma x^2+\beta x+\alpha}dx$,

die beiden ersten Glieder integrabel, $=\frac{Ex^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}$ sind: so bleibt uns nur das ächt gebrochene

$\int\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}dx$ zu integriren noch rückständig.

§. 2. Da nun $\frac{Z}{N} = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{\gamma(x-\mathfrak{f})(x-\mathfrak{g})}$ (durch $-\mathfrak{f}$ und $-\mathfrak{g}$ die Gegengröſsen derjenigen beiden Werthe des x angedeutet, welche $\alpha+\beta x+\gamma x^2 = 0$ geben würden) nach Diff. R. XXVI. §. 15.

auch $\frac{Z}{N} = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\mathfrak{F}}{x-\mathfrak{f}} + \frac{\mathfrak{G}}{x-\mathfrak{g}}\right]$ mit constantem

$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}-\mathfrak{g}}$, und $\mathfrak{G} = -\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}-\mathfrak{g}}$ seyn muſs: so hat

man $\int\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}dx = \frac{1}{\gamma}\left[\int\frac{\mathfrak{F}\,dx}{x-\mathfrak{f}} + \int\frac{\mathfrak{G}\,dx}{x-\mathfrak{g}}\right]$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[\mathfrak{F}\log(x-\mathfrak{f}) + \mathfrak{G}\log(x-\mathfrak{g})\right]$$

also $\int\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}dx$

$$= \frac{1}{\gamma(\mathfrak{f}-\mathfrak{g})}\left[(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mathfrak{f})\log(x-\mathfrak{f}) - (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mathfrak{g})\log(x-\mathfrak{g})\right] \quad (♂$$

Beispiel.

Da $\int\frac{4+3x}{6x^2+1.x-2}dx = \int\frac{1}{6}\cdot\frac{4+3x}{x^2+\frac{x}{6}-\frac{2}{6}}dx$

$= \frac{1}{6}\int\frac{4+3x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}dx$ ist, indem sich die

eine Wurzel $x = \mathfrak{f} = +\frac{1}{2}$, die andere $x = \mathfrak{g} = -\frac{2}{3}$ ergibt; so muſs es nach (♂

$$= \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)}\left[(4+3.\tfrac{1}{2})\log(x-\tfrac{1}{2}) - (4-3.\tfrac{2}{3})\log(x+\tfrac{2}{3})\right]$$

seyn,

das ist $= \frac{1}{7}\left[\frac{11}{2}\log\left(x-\frac{1}{2}\right) - 2\log\left(x+\frac{2}{3}\right)\right]$

§. 3. Auch die folgenden sechs besonderen Fälle des allgemeinen

$$\int \frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\gamma(f-g)}\Big[(a+bf)\log(x-f) - (a+bg)\log(x-g)\Big]$$

werden so häufig gebraucht, daſs es nützlich ist, sie nach einander einzeln hier beachtet zu wissen. Nämlich

1) $a = 1$, und $b = 0$ gegeben, hat man

$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{1}{\gamma(f-g)}\Big[\log(x-f) - \log(x-g)\Big]$$

$$= \frac{1}{\gamma(f-g)} \log \frac{x-f}{x-g}$$

2) $a = 0$ und $b = 1$ gegeben, hat man

$$\int \frac{x\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = \frac{1}{\gamma(f-g)}\Big[f\log(x-f) - g\log(x-g)\Big]$$

3) In 1) den Coefficienten $\gamma = 0$ gesetzt, und in dem nunmehr nur noch zweigliedrigen Nenner (des nachher folgenden Gebrauches wegen) die beiden Coefficienten α und β, durch a und b geschrieben, würden wir, da $a+bx = 0$, nur eine einzige Gleichungswurzel $x = f = -\frac{a}{b}$ behält, die andere g aber gänzlich weggefallen ist, also in der Gleichung 1) durch ein $g = 0$ aufgeführt werden müſste, würden wir, sage ich,

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{0(f-0)} \log \frac{x-f}{x}$$ erhalten. Wir haben nicht nöthig, etwa vermittelst einer hinzu gefügten Constante, der Unbestimmtheit dieses Ausdruckes mühsam uns zu entledigen, da wir ja ohne dies schon wissen,

dafs $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \int \frac{b\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log(a+bx)$ seyn mufs. Auch würden wir

4) in 2) den Coefficienten $\alpha = 0$ gesetzt, und in dem übrigen, nun zweigliedrigen Nenner, die hier übrigen beiden Coefficienten, β und γ, wiederum durch a und b geschrieben,

$$\int \frac{x\,dx}{ax+bxx} = \frac{1}{b(-\frac{a}{b})} \left[-\frac{a}{b} \log(x+\frac{a}{b}) - 0 . \log(x-0)\right]$$

erhalten; indem hier die Gleichung $ax+bxx = 0$, aufser ihrer einen Wurzel $x = -\frac{a}{b}$, nur die andere $x = 0$ hat. Die hier erhaltene Gleichung ist nun sogleich auch

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \log(x+\frac{a}{b}) = \frac{1}{b} \log \frac{a+bx}{b}$$

$$= \frac{1}{b}\left[\log(a+bx) - \log b\right]$$ von der obigen

$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log(a+bx)$, lediglich in der Constante verschieden; daher sie beide richtig seyn können. Dafs sie es wirklich sind, und wie sie eigentlich einerlei behaupten, werden wir nachher (in §. 5.) erörtern.

5) In 1) den Coefficienten $\beta = 0$ gesetzt, und den nunmehr zweigliedrigen Nenner, $\alpha + \gamma xx$, durch $a+bxx$ geschrieben, haben wir

$$\int \frac{dx}{a+bxx} = \frac{1}{b(f-g)} \left[\log(x-f) - g \log(x-g)\right].$$

Da nun der Gleichung $a+bxx = 0$ eine Wurzel $f = +\sqrt{\frac{-a}{+b}}$, andere Wurzel $g = -\sqrt{\frac{-a}{+b}}$ ist:

so hat man $b(f-g) = b\left(2\sqrt{\frac{-a}{+b}}\right) = 2\sqrt{-ab}$; also

$$\int\frac{dx}{a+bxx} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\left[\log\left(x-\sqrt{\frac{-a}{+b}}\right)-\log\left(x+\sqrt{\frac{-a}{+b}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}}.$$

Ein äusserst merkwürdiges Integral! dessen Ausdruck aber, wie wir bald erörtern wollen, einer Umformung nöthig hat, um für den gewöhnlichsten Gebrauch sowol in Hinsicht der Constante, als der neben ihr nöthigen trigonometrischen Formel bequem zu werden.

6) Auch in 2) den Coeffizienten $\beta = 0$ gesetzt, und den übrigen binomischen Nenner $\alpha + \gamma xx$ durch $a + bxx$ geschrieben, haben wir

$$\int\frac{x\,dx}{a+bxx} = \frac{1}{b.2\sqrt{\frac{-a}{b}}}\left[\sqrt{\frac{-a}{b}}\log\left(x-\sqrt{\frac{-a}{b}}\right)\log\left(x+\sqrt{\frac{-a}{b}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2b}\left[\log\left(x-\sqrt{\frac{-a}{b}}\right)+\log\left(x+\sqrt{\frac{-a}{b}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2b}\log\left(xx+\frac{a}{b}\right).$$

Eben dieses Integrand, unmittelbar behandelt, finden wir freilich

$$\int\frac{x\,dx}{a+bxx} = \frac{1}{2b}\int\frac{2bx\,dx}{a+bxx} = \frac{1}{2b}\log(a+bxx);$$ aber

diese beiden Ausdrücke können für jeden einzelen Werth des x verschiedene Gröſsen-Erträge zu geben, nur so lange scheinen, als ihre Constanten unbestimmt gelassen werden.

Die Integral-Constanten, und die unmöglichen Gröfsen in diesen logarithmischen Integralen betreffend.

§. 4. Wenn man durch verschiednes Verfahren bei dem Integriren, zwei verschieden geformte Ausdrücke des Integrales, z. B. in §. 3.,

in 3) das Integrand $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log(a+bx)$

in 4) dagegen $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log \frac{a+bx}{b}$ erhalten hat: so kann und mufs solche Verschiedenheit lediglich daher rühren, weil alle Integrirungsregeln lediglich aus den veränderlichen Endgränzen der, durch Integrirung gesuchten, Function gefolgert sind, und daher durch diese Regeln über die Anfangsgränze der gesuchten Function nichts bestimmt wird, diese aber natürlich auch noch bestimmt werden mufs, wenn man bei irgend einem Gebrauche der gesuchten Function über den Ertrag ihrer wirklichen Gröfse gewifs seyn will. Heifse X die Function, die man als dem Integranden $\int \frac{dx}{a+bxx}$ zugehörig zu finden verlangt: so weifs man

dafs $X = \frac{1}{b} \log(a+bx) + C$ seyn mufs, aus der ersten, und

dafs $X = \frac{1}{b} \log\left(\frac{a+bx}{b}\right) + K$ seyn mufs, aus der zweiten Integrirung; so dafs sowol C als K, in jeder von diesen beiden Gleichungen, jede constante Gröfse seyn kann.

§. 5. Um nun gewifs zu werden, ob beiderlei Ausdrücke dieses X übereinstimmend seyen, ist es bisweilen das anschaulichste, dafs man beide Ausdrücke auf einerlei Anfangsgränze der Function X einschränkt. Im vorliegenden Falle ist es

das bequemste, hierzu die natürlichste Anfangsgränze des X zu wählen, nämlich, daſs X selbst, zugleich mit x seinen Anfang nehme, also für $x = o$, auch $X = o$ sey, oder, wie man zu sagen pflegt, mit $x = o$ auch X verschwinde. Da nun hiezu die Constante $C = -\frac{1}{b}\log a$, die Constante $K = -\frac{1}{b}\log\frac{a}{b}$ nöthig ist: so hat man

erstens $X = \frac{1}{b}\left[\log(a+bx) - \log a\right] = \frac{1}{b}\log(1+\frac{b}{a}x)$

zweitens $X = \frac{1}{b}\left[\log\frac{a+bx}{b} - \log\frac{a}{b}\right] = \frac{1}{b}\log(1+\frac{b}{a}x)$;

und so sieht man (besonders in dem letzten Ausdrucke, in welchem die Constante mit dem veränderlichen Theile der Gleichung vereinigt ist), daſs beide Integrale auf einerlei Anfangsgränze des X reducirt, allerdings für jeden Werth des x einerlei geben müssen.

Ein anderes allgemein durchgreifendes Mittel wird man durch folgendes Beispiel vollständig kennen lernen.

$\int\frac{dx}{x\sqrt{(a+bxx)}}$ wird $=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a}-\sqrt{(a+bxx)}}{a}$ durch eine richthige Methode, durch eine andere, eben so richtige, dagegen $= \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{x}{\sqrt{(a+bxx)}+\sqrt{a}}$ späterhin von uns gefunden. Um gewiſs zu werden, ob beide Ausdrücke durch zwei constante Gröſsen C und K übereinstimmend werden können, setze man die Fragegleichung an,

ob $\frac{x.K}{\sqrt{X}+\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{X}).C}{x}$ seyn könne: so wird dazu erfordert,

daſs $\frac{xx}{(\sqrt{a}+\sqrt{X})(\sqrt{a}-\sqrt{X})} = \frac{C}{K}$,

das ist, $\frac{xx}{a-(a+bxx)} = \frac{C}{K}$, also $\frac{1}{b} = \frac{C}{K}$ sey. Woraus erhellet, daſs C und K allerdings constante Gröſsen seyn können, auch $K = bC$ seyn muſs, wenn beide Ausdrücke für einerlei Werthe des x, auch einerlei Gröſsen-Ertrag geben sollen.

§. 6. Bei dem in §. 3. No. 5. aufgefundenen $\int\frac{dx}{a+bxx} = \frac{1}{2\sqrt{-ab.}}\log\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}}$ wird man meistens unter denen diesem Integranden zugehörigen Functionen $X = \frac{1}{2\sqrt{-ab.}}\log\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}} + C$, gerade diejenige zu gebrauchen wünschen, welche mit $x = 0$ ihren Anfang nimmt, also $\overset{x=0}{X} = 0$ gibt.

Da demnach $0 = \frac{1}{2\sqrt{-ab.}}\left[\log\frac{-\sqrt{-a}}{+\sqrt{-a}} + \log C\right]$ seyn soll: so muſs $\log C = -\log -1$, folglich die verlangte $X = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\left[\log\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}} - \log -1\right]$ also dieses $X = \frac{1}{2\sqrt{-ab.}}\log\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{-x\sqrt{b}-\sqrt{-a}} + 0$ seyn; welches nun mit $x = 0$ allerdings als

$$\overset{x=0}{X} = \frac{1}{2\sqrt{-ab.}}\log 1 = 0 \text{ sich ergibt.}$$

§. 7. Weil man aber neben diesem logarithmischen Ausdrucke des X, sehr oft auch dessen trigonometrischen Ausdruck zu beachten hat: so ist es äuſserst rathsam, und fast nothwendig, ein $+a$ statt des $-a$ in der Formel zu haben.

Wenn wir in dieser Hinsicht in der letzten Gleichung des X, ihren logarithmisirten Bruch im Zähler und Nenner durch $\sqrt{-1}$ multipliciren, und dadurch $X = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{x\sqrt{-b}-\sqrt{a}}{-x\sqrt{-b}-\sqrt{a}} + o$,

also auch $= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{-x\sqrt{-b}+\sqrt{a}}{+x\sqrt{-b}+\sqrt{a}} + o$ erhalten haben, so ist es freilich sehr gewiſs, daſs auch diese letzte Gleichung calculatorisch richtig geblieben seyn muſs.

§. 8. Weit treffender aber wird uns diese Umänderung durch die Betrachtung gerechtfertigt, daſs wir bei unserer Begründung des Integrales X die beiden Wurzeln der Gleichung $a + bx^2 = o$, also $x = +\sqrt{\frac{-a}{+b}} = f$ und $x = -\sqrt{\frac{-a}{+b}} = g$ gebraucht haben, und statt dieser f und g, nun $f = +\sqrt{\frac{+a}{-b}}$ und $g = -\sqrt{\frac{+a}{-b}}$ gebraucht, diese Wurzeln in ihrer Gröſse allerdings unverändert bleiben müssen. Da indessen diese letzten Wurzelformen nicht der Gleichung $a + bx^2 = o$, sondern der Gleichung $-a - bx^2 = o$ zugehören; so ist es hiedurch einleuchtend, daſs wir in §. 7. es mit einem $\mathfrak{X}$ zu thun haben, welches nicht ferner ein

$X = \int \frac{dx}{a+bxx}$, sondern

ein $\mathfrak{X} = \int \frac{dx}{-a-bxx} = \frac{-1}{+1} \cdot \int \frac{dx}{a+bxx}$, also ein $\mathfrak{X} = -X$ ist. Daher nun die deutlichen Schlüsse eigentlich folgende sind,

Es ist $X = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \cdot \log \frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{-x\sqrt{b}-\sqrt{-a}} + o$, allerdings in seiner

Grösse auch $= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \cdot \log \frac{x\sqrt{-b}-\sqrt{a}}{-x\sqrt{-b}-\sqrt{a}} + o$, aber wegen dieser Umtauschung

seines $\frac{-a}{+b}$ gegen $\frac{+a}{-b}$ nunmehr eigentlich

ein $\mathfrak{X} = -X = \frac{-1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{+x\sqrt{-b}-\sqrt{a}}{-x\sqrt{-b}-\sqrt{a}} + o$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{-x\sqrt{-b}-\sqrt{a}}{+x\sqrt{-b}-\sqrt{a}} + o,$$

also auch $= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{+x\sqrt{-b}+\sqrt{a}}{-x\sqrt{-b}+\sqrt{a}} + o$ *).

§. 9. Da man für $\int \frac{dx}{-a-bx^2} = -1 \int \frac{dx}{+a+bx^2}$ auch $-X = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \cdot \log \frac{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}$ hat: so erhellet, dass der logarithmische Ausdruck des Integranden $\int \frac{dx}{\mp a \mp bx^2}$, nämlich für alle gleichbezeichnete a und b allemal, unmögliche Grössen enthält; indess

---

*) Hr. Meier Hirsch bemerkt in seinen Correcturen, dass man statt des Factors $\frac{1}{2\sqrt{-ab}}$, lieber $\frac{1}{2a\sqrt{-\frac{b}{a}}}$ schreiben solle. Wo man darin ändern will, möchte doch rathsam seyn, $\sqrt{\frac{+b}{-a}}$ bei logarithmischen, und dagegen $\sqrt{\frac{-b}{+a}}$ bei trigonometrischen Ausdrücken, statt der weniger bestimmten Form $\sqrt{-\frac{b}{a}}$ zu schreiben.

dagegen für $\int \frac{dx}{+a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$,

also auch für $\int \frac{dx}{-a + bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}$, also bei allen ungleich bezeichneten a und b, diejenigen Unmöglichkeiten wegfallen, welche bei den gleichbezeichneten durch die unmöglichen Wurzeln $\sqrt{-ab}$ und $\sqrt{-b}$, für alle Werthe des x entstehen mußsten; womit aber keineswegs behauptet werden kann, daſs nicht dessen ungeachtet, auch bei ungleich bezeichneten a und b, die logarithmische Gröſse für einige Werthe des x, nämlich für jedes $x > \sqrt{\frac{a}{b}}$ sich logarithmisch unmöglich ergeben muſs; indem ja für verneinte Gröſsen keine mögliche Logarithmen Statt finden.

§. 10. Was aber die allgemeinen Unmöglichkeiten betrifft, welche in jedem logarithmischen Ausdrucke eines $\int \frac{dx}{a + bx^2}$ und $\int \frac{dx}{-a - bx^2}$ wegen der gleichbezeichneten a und b sich einfinden müssen, so kann man ihrer sich dadurch entschlagen, daſs man statt des logarithmischen Integrirens, des trigonometrischen sich bedient, indem ja (S. 144.)

jedes $\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$ arc tang $x \sqrt{\frac{b}{a}}$ ist, folglich auch jedes

$$\int \frac{dx}{-a - bx^2} = -1 \cdot \int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{-1}{\sqrt{ab}} \text{ arc tang } x \sqrt{\frac{b}{a}}$$

seyn muſs.

§. 11. In §. 3. No. 6. haben wir gefunden, daſs durch eine Integrirungsregel

1) $\int \frac{x\,dx}{a+bxx} = \frac{1}{2b} \log\left(xx + \frac{a}{b}\right)$; durch eine andere dagegen

2) $\int \frac{x\,dx}{a+bxx} = \frac{1}{2b} \log(a+bxx)$ sich ergibt.

Da für $x = 0$, der erste Ausdruck verschwindet, wenn man dessen logarithmisirte Gröſse durch den constanten Factor $\frac{b}{a}$ multiplicirt, der andere Ausdruck dagegen, wenn man dessen logarithmisirte Grundgröſse durch den constanten Factor $\frac{1}{a}$ multiplicirt: so hat man durch

1) ein $X = \frac{1}{2b} \log\left(\frac{b}{a}xx + 1\right)$, durch

2) ein $\mathfrak{X} = \frac{1}{2b} \log\left(1 + \frac{b}{a}xx\right)$ gefunden, daſs also

$\mathfrak{X} = X = \frac{1}{2b} \log\left(\frac{a+bxx}{a}\right)$, nicht nur für $x = 0$ beide verschwindend, sondern eben deſshalb auch für jeden andern Werth des x immerfort einerlei gebend sind.

§. 12. Auch dieses Integral wird, gerade bei ungleich bezeichneten a und b keinen möglichen Logarithmen haben, wenn $\mp a \pm bxx$ eine verneinte Gröſse ist. Diejenigen unmöglichen Factoren aber, welche d u r c h die Z e r l e g u n g des $a+bxx$ in dessen e i n f a c h e F a c t o r e n hineingebracht sind (und bei der 2ten Integrirungsmethode gar nicht eintreten), haben sich selbst auch wieder weggehoben.

Da nun

jedes $\int \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{a+bxx}dx = \mathfrak{a}\int\frac{dx}{a+bxx} + \mathfrak{b}\int\frac{x\,dx}{a+bxx}$ ist:

so sehen wir, daſs in Betreff der Unmöglichkeiten,

welche dabei vorkommen, alles auf diejenigen hinauskommen muſs, die wir schon bei dem $\int \frac{dx}{a+bxx}$ erörtert haben.

§. 13. In mehrer Hinsicht ist es nöthig, auch bei dem allgemeinen

$$\int \frac{a+bx}{\alpha+\beta+\gamma x^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{\gamma(f-g)}\Big[(a+bf).\log(x-f)-(a+bg).\log(x-g)\Big]$$

die Unmöglichkeiten desselben, und in wie fern man sich ihrer entledigen kann, sorgfältig, und Anfängern verständlich zu erörtern.

In den einfachen Factoren, $x-f$ und $x-g$, durch welche das quadratische Aggregat $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ als $=\gamma(x-f)(x-g)$ dargestellt wird, sind $-f$ und $-g$ die Gegengröſsen der beiden Wurzelwerthe $x=f$ und $x=g$, bei welchen das Aggregat sich $=0$ ergeben, also der Gleichung $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$, folglich auch der Gleichung $x^2+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha}{\gamma}=0$ Genüge geschehen würde. Der Kürze wegen $\beta\beta-4\alpha\gamma=i$ geschrieben, haben wir die eine

Wurzel $f=-\frac{\beta}{2\gamma}+\frac{\sqrt{\beta\beta-4\alpha\gamma}}{2\gamma}=\frac{-\beta+\sqrt{i}}{2\gamma}$

die andere

Wurzel $g=-\frac{\beta}{2\gamma}-\frac{\sqrt{\beta\beta-4\alpha\gamma}}{2\gamma}=\frac{-\gamma-\sqrt{i}}{2g}$,

also beide Wurzeln $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{möglich}}{\text{unmöglich}}$, je nachdem

$i=\beta\beta-4\alpha\gamma$ als ein $\pm i$ gegeben ist.

§. 14. Nachdem wir den Doppelwerth des $\sqrt{}$ im Wurzelwerthe $x=-\beta\pm\sqrt{i}$, bereits ge-

trennt, und dem einen Wurzelwerthe f das $+1.\sqrt{i}$, dem andern g dagegen das $-1.\sqrt{i}$ zugeeignet haben: so ist es nun gewiſs, daſs sogleich in der Folgerung $f - g = \frac{\sqrt{i}}{\gamma}$, das $\sqrt{}$ nicht fernerhin zweideutig, sondern schlechterdings nur ein $+1.\sqrt{i}$ bedeutend seyn kann: so daſs wir auch für allen fernern Gebrauch dieser Wurzel $\sqrt{i}$, allemal nur den absoluten Werth derselben zu verstehen haben.

Da wir nun ferner $a + bf = \frac{2\gamma a - b\beta + b\sqrt{i}}{2\gamma}$

und $a + bg = \frac{2\gamma a - b\beta - b\sqrt{i}}{2\gamma}$

auch $x - f = \frac{2\gamma x + \beta - \sqrt{i}}{2\gamma}$

und $x - g = \frac{2\gamma x + \beta + \sqrt{i}}{2\gamma}$ haben: so erhalten wir obiges

$$\int \frac{a + bx}{\alpha + \beta x + \gamma xx} = \frac{1}{\gamma(f-g)} \left\{ \begin{matrix} (a+bf)\log(x-f) \\ -(a+bg)\log(x-g) \end{matrix} \right\} \quad (\S.\ 2.\ \delta)$$

$$\text{auch} = \frac{1}{2\gamma\sqrt{i}} \left\{ \begin{matrix} (2\gamma a - b\beta + b\sqrt{i}) \log \frac{2\gamma x + \beta - \sqrt{i}}{2\gamma} \\ -(2\gamma a - b\beta - b\sqrt{i}) \log \frac{2\gamma x + \beta + \sqrt{i}}{2\gamma} \end{matrix} \right\}$$

§. 15. Für den Fall, daſs $a = \beta$, und $b = 2\gamma$ gegeben wäre, hätten wir also

$$\int \frac{\beta + 2\gamma x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} dx = \log \frac{2\gamma x + \beta - \sqrt{i}}{2\gamma} + \log \frac{2\gamma x + \beta + \sqrt{i}}{2\gamma}$$

$$= \log \left(\frac{2\gamma x + \beta}{2\gamma} - \frac{\sqrt{i}}{2\gamma}\right)\left(\frac{2\gamma x + \beta}{2\gamma} + \frac{\sqrt{i}}{2\gamma}\right)$$

$$= \log \left(\frac{4\gamma^2 x^2 + 4\beta\gamma x + \beta^2}{4\gamma^2} - \frac{\beta\beta - 4\alpha\gamma}{4\gamma^2}\right)$$

$$= \log \left(\frac{4\gamma^2 x^2 + 4\beta\gamma x + 4\alpha\gamma}{4\gamma^2}\right) = \log\left(x^2 + \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha}{\gamma}\right)$$

Wenn wir dagegen bedenken, dafs dieses $\int \frac{\beta + 2\gamma x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} dx$ der Integrirungsregel $\int \frac{dX}{X} = \log X$ unterworfen ist: so erhalten wir, dafs $\int \frac{\beta + 2\gamma x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} dx = \log(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$ seyn mufs.

Beide Integrale sind richtig: weil sie nur durch ein constantes $\log C$ und $\log K$ verschieden sind. Denn sollen sie beide bei $x = o$ verschwinden, so mufs jenem ersten die Constante $\log C = - \log \frac{\alpha}{\gamma}$, diesem letzteren die Constante $\log K = - \log \alpha$ hinzugefügt werden. Diese Constanten mit den beiden veränderlichen Theilen der Integrale vereinigt, erhält man für das erste, die Function $\log\left(\frac{\gamma}{\alpha} x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + 1\right)$ für das zweite, die Function $\log\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} x^2\right)$ beide auf das völligste übereinstimmend.

§. 16. Absichtlich habe ich es hiemit darlegen wollen, dafs die sämmtlichen $\sqrt{i} = \sqrt{\beta\beta - 4\alpha\gamma}$, welche bei der Zerlegung in einfache Factoren, $x - f$ und $x - g$, durch die Wurzelwerthe $\begin{matrix} f \\ \text{und } g \end{matrix} = - \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\beta\beta - 4\alpha\gamma}$ in den logarithmisch aufgefundenen Integralausdruck (δ gekommen sind; auch sämmtlich sich von selbst wiederum wegheben, wenn bei gegebnem $a = \beta$ und $b = 2\gamma$ der logarithmische Integralausdruck kein $\sqrt{i}$ erfordert, es mag nun übrigens dieses $\sqrt{i} = \sqrt{\beta\beta - 4\alpha\gamma}$, bei negativ gegebnem i eine unmögliche, oder bei bejaht gegebnem i, eine mögliche rationale oder irrationale Wurzel seyn.

§. 17. In dem noch übrigen dritten Falle, daſs $i = \beta\beta - 4\alpha\gamma = 0$ gegeben wäre, also auch bei der Zerlegung in einfache Factoren gar keine Wurzel $\sqrt{i}$ in dem Ausdrucke vorkommen könnte, würde man wegen der gleichen Wurzeln $f = -\frac{\beta}{2}$ und $g = -\frac{\beta}{2}$, die Zerlegung

$$\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma xx} = \frac{a+bf}{(x-f)^2} + \frac{b}{x-f}$$

(M. s. Diff. R. XXVI. §. 16 u. 17.) ergreifen müssen, und

dadurch $\int \frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma xx} = \int \frac{a+bf}{(x-f)^2} dx + \int \frac{b}{x-f} dx$

$$= (a+bf)(x-f)^{-2} dx + b \int \frac{dx}{x-f} = \frac{a+bf}{-1.(x-f)}$$

$$+ b \log(x-f) = -\frac{a-b\frac{\beta}{2}}{x+\frac{\beta}{2}} + b \log\left(x+\frac{\beta}{2}\right) \text{ erhalten.}$$

§. 19. Die Zerlegungstheorie, welche wir in Diff. R. XXVI. mitgetheilt haben, ist hinreichend, uns zu überzeugen, daſs wir jedes ächt gebrochene $\frac{a+bx+cx^2 \ldots + mx^{n-1}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2 \ldots + \mu x^n}$ in lauter solche Brüche zerlegen können, die uns für $\int \frac{M\,dx}{N}$ lauter integrable Glieder angeben. Wenn wir in diesen Integralen unmögliche Wurzeln erhalten, so müssen sie bekanntlich parweise vorkommen, und je zwei und zwei der einzeln integrirten Glieder mit einander vereinigt, uns ein $\int \frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}$ darstellen.

Eine irrige Meinung würde es seyn, wenn man gewisse, nicht so ganz deutliche Aeuſserungen eini-

ger Lehrbücher dahin verstehen wollte, daſs man durch diese Darstellung vermittelst eines quadratischen Nenners sich der unmöglichen Wurzeln entledigt finden könne, welche bei der Zerlegung in einfache Factoren sich ergeben würden; denn wo diese einfachen Factoren ein unmögliches $\sqrt{}i$ in den Integralausdruck bringen, da werden sie auch in dem Integrale des $\int\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}$ vorhanden bleiben, so lange dessen Ausdruck durch logarithmisches Integriren soll gefunden werden.

Sondern das einzige Mittel zur Umgehung dieser Unmöglichkeiten wird auch in diesem Integranden darin bestehen, daſs man es trigonometrisch auszudrücken sucht, worüber wir im folgenden Capitel beibringen werden, so viel uns davon zu wissen nöthig seyn könnte.

§. 19. Die Methode, durch Zerlegung in Factoren zu integriren. wird gewöhnlich auf ächt gebrochene rationale $\int\frac{M}{N}dx$ eingeschränkt, und dabei behauptet, daſs die Integralmethode für jedes rationale $\int\frac{M}{N}dx$ vollendet sey, weil ja jedes $N = \alpha+\beta x+\gamma x^2 \ldots\ldots + \mu x^m$ in m einfache Factoren zerlegbar seyn, folglich auch nach dieser Methode integrabel seyn müsse. Wenn man aber diese Zerlegung nicht anzugeben wisse, wie es meistens bei den mehr als quadratischen Aggregaten der Fall ist: so sey dieses als ein Mangel der endlichen Analysis, nicht aber der Integralmethode zu betrachten. Weit entfernt, dieser schon von Leonhard Euler dargestellten Ansicht, ihren theoretischen Nutzen abzusprechen, glaube ich doch auch dagegen erinnern zu müssen, daſs die Zerlegungsmethode auch auf viele irrationale Integranden äuſserst kurz und deutlich sich anwenden läſst, und vermittelst solcher Factoren sich anwenden läſst, die man nicht erst durch algebraische Auflösung

eines rational gemachten Aggregates zu entdecken nöthig hat; wie wir namentlich auch durch die meisten Specialregeln im folgenden Capitel es bestätigt finden werden.

Eilftes Capitel.

Fortsetzung des logarithmischen Integrirens.

§. 1. Sehr gewöhnlich ist es, einige einzeln aufgefundene logarithmische Integrale, z. B. das vorhin gefundene $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a-x}{a+x} + \log C$ aufzuführen, und durch einige Beispiele darzulegen, daſs sich auf dasselbe viele andere, durch gehörige Substitutionen, zurückbringen lassen.

Um z, B. durch das eben aufgeführte Integral auch $\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{x}}$ zu finden, kann man $x = z^2$ setzen: so ist $dx = 2z\,dz$, auch $\sqrt{x} = z$, also $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dz$; und demnach $\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{dz}{a-zz}$, also, durch Vergleichung mit dem oben schon gefundenen, nun gewiſs, daſs

$$\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a}+z}{\sqrt{a}-z} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}} + \log C$$

seyn muſs.

§. 2. Immerhin ist es unangenehm, die zweckdienliche Substitution errathen zu müssen, wo dergleichen vorhanden ist, und vergebens umher gerathen zu haben, wo es dergleichen nicht giebt; daher ich statt solcher, auf gut Glück ergriffenen Substitutionen, lieber eines andern Verfahrens mich be-

diene, welches ich **Formvergleichung** nennen möchte. Durch solche Formenvergleichung liegt im vorigen Beispiele sogleich vor Augen, daſs

$$\int\frac{dx}{(a-x)\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{(\sqrt{a}\sqrt{a}-\sqrt{x}\sqrt{x})\sqrt{x}}=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{a}\sqrt{a}-\sqrt{x}\sqrt{x}}$$

geschrieben, der obigen, schon integrirten Form dergestalt unterworfen ist, daſs wir dadurch des Integrales $=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$ gewiſs geworden sind.

§. 3. Durch solche Formenvergleichung sind mir viele Hülfsmittel zur anschaulichen Integrirung entstanden, von denen ich einige unter dem Namen der **Specialregeln** hier beibringen werde. Nicht nur wird man aus jeder solchen Specialregel eine Menge von Integralen nach bestimmter einleuchtender Ordnung ableiten, sondern auch gar oft einem vorgegebnen Integranden sogleich es ansehen können, ob er dieser oder jener Specialregel unterworfen sey; und in diesem Falle wird man auch sogleich die dazu nöthige Substitution vor Augen haben.

Die meisten von solchen Specialregeln werden natürlich die Absicht haben, besonders die Integrirung irrationaler Functions-Differentiale zu erleichtern. Zuvörderst aber will ich als erste Specialregel diejenige aufstellen, die mir durch Formenvergleichung, auf die Zerlegungstheorie angewandt, entstanden ist. Man wird es wohl bemerken, daſs man vermittelst dieser Regel das Integral nicht nur leichter findet, als wenn man sich bloſs den allgemeinen Lehren der Zerlegung überläſst, sondern auch deutlich übersieht, wo und wie man zwei, in ihrer Constante verschiedene Integral-Ausdrücke zu finden vermag. Ueberdies aber werden durch diese Regel nicht bloſs einfache oder rationale, sondern auch viele solche, auch irrationale, Factoren für brauchbar

erklärt, deren Summe oder Differenz eine constante Gröſse ausmacht. Auf mehr als zwei veränderliche Factoren die Regel anzuwenden, habe ich nicht für nöthig gefunden; obgleich sie offenbar auf diese nicht eingeschränkt ist.

Specialregel 1.

§. 4. Wenn Z und N im vorgegebnen $\int \frac{dZ}{N}$ solche Functionen des x sind, daſs nur ein mit x veränderlicher Factor 𝔵, uns 𝔵 dZ = dN geben würde (dieses Integrand also, vermittelst eines constanten Hülfsfactors, der Hauptregel IX. §. 22, nicht unterwerfbar seyn würde), N aber, auſser einem beliebigen constanten Factor, der also auch = 1 seyn könnte, in zwei veränderliche Factoren H und K zerlegt werden kann, deren Summe H + K entweder, oder deren Differenz H — K, einen constanten Ertrag 𝔈 ausmacht,
und deren Differentiale dH und dK, vermittelst constanter Factoren 𝔥 und 𝔨,

uns dZ = 𝔥 . dH, und dZ = 𝔨 . dK gewähren: so hat man

entweder I) $\int \frac{dZ}{H.K} = \frac{\mathfrak{k} \log K + \mathfrak{h} \log H}{H + K}$

oder II) $\int \frac{dZ}{H.K} = \frac{\mathfrak{k} \log K - \mathfrak{h} \log H}{H - K}$

das Ite, wenn der eine Factor K zum andern H zu addiren war,

das IIte, wenn der eine Factor K vom andern H zu subtrahiren war, um einen constanten Ertrag 𝔈 zu gewähren.

§. 5. *Beweis.*

Wenn $H \pm K = \mathfrak{C}$, auch $dZ = \mathfrak{h}\,dH$ und $= \mathfrak{k}\,dK$ ist:

so mufs $\frac{\mathfrak{C}.dZ}{H.K} = \frac{H \pm K}{H.K}\,dZ = \frac{dZ}{K} \pm \frac{dZ}{H}$ seyn;

also $\mathfrak{C}.\int\frac{dZ}{H.K} = \int\frac{\mathfrak{k}\,dK}{K} \pm \int\frac{\mathfrak{h}\,dH}{H} = \mathfrak{k}\log K \pm \mathfrak{h}\log H,$

und $\int\frac{dZ}{H.K} = \frac{\mathfrak{k}\log K \pm \mathfrak{h}\log H}{\mathfrak{C}}.$

Beispiele.

§. 6. Sey $\frac{dZ}{N} = \frac{dx}{ax - xx} = \frac{dx}{x(a-x)}$ gegeben: so ist es hier die **Summe** der Factoren, $x + (a-x)$, welche den constanten Ertrag $\mathfrak{C} = a$ gibt, wodurch wir also zum Gebrauche der **Regel** I) bestimmt werden; nach welcher nämlich

$$\int\frac{dZ}{H.K} = \frac{\mathfrak{k}\log K + \mathfrak{h}\log H}{H + K} \text{ seyn mufs.}$$

Wenn wir nun $H = x$ und $K = a - x$ ansetzen; so haben wir $dZ (= dx) = 1.dH$, also $\mathfrak{h} = 1$
und $dZ (= dx) = -1.dK$, also $\mathfrak{k} = -1$,
folglich

$$\int\frac{dx}{ax - xx} = \frac{1}{a}(-1.\log(a-x) + 1.\log x) = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a-x} + C$$

Wenn wir **dagegen** $H = a - x$ und $K = x$ ansetzen, so haben wir $\mathfrak{h} = -1$ und $\mathfrak{k} = +1$, also

$$\int\frac{dx}{ax - xx} = \frac{1}{a}(1.\log x - 1.\log(a-x)) = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a-x} + C;$$

dafs wir also den Ausdruck dieses Integrales eben so wie vorhin erhalten.

Es ist auch leicht zu durchsehen, warum es hier am Ende einerlei geben mufs, ob man die beiden Factoren x und a — x als H und K, oder
ob man a — x und x als H und K behandelt.

§. 7. Etwas anders verhält es sich, wo man, um einen constanten Ertrag $\mathfrak{E}$ aus den beiden Factoren zu erhalten, den einen von dem andern abzuziehen genöthigt ist.

Hier kann es allerdings durch die verschiedene Wahl des H und K sich ergeben, daſs man zwei verschiedene Ausdrücke des Integrales erhalten muſs, von denen der eine gerade die Gegengröſse des andern ist; so daſs sie nur durch einen constanten Totalfactor ∓ 1 von einander verschieden sind, und demnach ihre Verschiedenheit durch eine verschiedene Integralconstante wieder gehoben wird.

Für eine gute Eigenschaft unserer Regel wird man es anerkennen, daſs sie allemal zwei verschiedene Ausdrücke des Integrales darbietet, wo diese Alternative eine Folge der gebrauchten Zerlegungs-Methode ist.

§. 8. Sey $\frac{dZ}{N} = \frac{dx}{ax + xx} = \frac{dx}{x(a+x)}$, so muſs von den beiden Factoren x und $(a+x)$ der eine von dem andern abgezogen werden, um einen constanten Ertrag $\mathfrak{E}$ zu gewähren; daher bei diesem Beispiele die Formel II) in §. 4. zu befolgen ist.

Wünschen wir den Ertrag $\mathfrak{E}$ bejaht zu haben, so setzen wir $H = a + x$ und $K = x$: da denn $\mathfrak{E} = H - K = a$ sich ergibt; übrigens $\mathfrak{h} = 1$ und $\mathfrak{k} = 1$ ist, also

$$\int \frac{dx}{ax+xx} = \frac{1}{a}[\log x - \log(a+x)] = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a+x} + C.$$

Wenn wir dagegen $H = x$ und $K = a + x$ setzen, so haben wir $\mathfrak{E} = H - K = -a$, übrigens $\mathfrak{h} = 1$ und $\mathfrak{k} = 1$, wie vorhin, also nunmehr

$$\int \frac{dx}{ax+xx} = -\frac{1}{a}\log\frac{x}{a+x} + K.$$

§. 9. Sey $\frac{dZ}{N} = \frac{dx}{aa - xx} = \frac{dx}{(a+x)(a-x)}$: so wird die **Summe** der beiden Factoren einen constanten Ertrag $\mathfrak{E} = 2a$ gewähren, und demnach die Formel I), §. 4, zu befolgen seyn.

Wenn wir $H = a+x$ und $K = a-x$ setzen, so haben wir

$$dZ\ (= dx) = 1 . dH, \text{ also } \mathfrak{h} = 1$$

und $dZ\ (= dx) = -1 . dK$, also $\mathfrak{k} = -1$; folglich

$$\int \frac{dx}{aa-xx} = \frac{-1 . \log(a-x) + 1 . \log(a+x)}{2\ a} = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + C.$$

Wenn wir $H = a - x$ und $K = a + x$ setzen, so haben wir $\mathfrak{E} = 2a$ wie vorhin, aber nunmehr $\mathfrak{h} = -1$ und $\mathfrak{k} = +1$,

$$\text{also } \int \frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + C; \text{ wie vorhin.}$$

§. 10. Sey $\frac{dZ}{N} = \frac{dx}{aa+xx} = \frac{dx}{(x+\sqrt{-aa})\ (x-\sqrt{aa})}$ so wird die **Differenz** der beiden Factoren einen constanten Ertrag gewähren, daher wir die Formel II) zu befolgen haben.

1) Wenn wir $H = x+\sqrt{-aa}$ und $K = x-\sqrt{-aa}$ setzen: so ist $\mathfrak{E} = H - K = +2\sqrt{-aa}$.

2) Wenn wir $H = x-\sqrt{-aa}$ und $K = x+\sqrt{-aa}$ setzen: so ist $\mathfrak{E} = H - K = -2\sqrt{-aa}$.

Da übrigens in beiden Fällen $dZ (= dx) = 1 . dH = 1 . dK$, also $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 1$ ist: so haben wir

$$1)\ \int\frac{dx}{aa+xx}=\frac{\log(x-\sqrt{-aa})-\log(x+\sqrt{-aa})}{+2\sqrt{-aa}}$$

$$=\frac{1}{+2\sqrt{-aa}}\log\frac{x-\sqrt{-aa}}{x+\sqrt{-aa}}+C$$

$$2)\ \int\frac{dx}{aa+xx}=\frac{\log(x+\sqrt{-aa})-\log(x-\sqrt{-aa})}{-2\sqrt{-aa}}$$

$$=\frac{1}{-2\sqrt{-aa}}\log\frac{x+\sqrt{-aa}}{x-\sqrt{-aa}}+C$$

Hier habe ich einerlei Constante C angesetzt, weil ja der veränderliche Theil des Integrales in beiden Ausdrücken einerlei ist; wegen $-\log\frac{X}{\mathfrak{X}}=+\log\frac{X}{\mathfrak{X}}$.

§. 11. Sey

$$\frac{dZ}{N}=\frac{dx}{a+bxx}=\frac{dx}{(x\sqrt{b}+\sqrt{-a})(x\sqrt{b}-\sqrt{-a})}:\ \text{so}$$

hat man

$$1)\ \int\frac{dx}{a+bxx}=\frac{1}{+2\sqrt{-a}}.\log\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}}+C.$$

$$2)\ \int\frac{dx}{a+bxx}=\frac{1}{-2\sqrt{-a}}.\log\frac{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}+C;$$ wiederum beides völlig einerlei. Und in Hinsicht der Richtigkeit muſs es uns kein Bedenken machen, daſs wir im vorigen Kapitel, §. 3 No. 5, den dortigen constanten Factor $\frac{1}{2\sqrt{(-ab)}}$, den hiesigen dagegen, $\frac{1}{2\sqrt{-a}}$ haben. Beide sind ja nur um den Total-factor $\frac{1}{\sqrt{b}}$ verschieden; und über die Totalfactoren vermag der vorgegebne Differential-Ausdruck nichts zu bestimmen.

Wiederum nur um einen Totalfactor ist der von Hrn. Meier Hirsch gebrauchte Ausdruck

des $\int\frac{dx}{a+bxx}$ verschjeden, den wir schon im vorigen Kapitel §. 8. gerechtfertigt haben.

§. 12. Aus dem Beweise der bisher benutzten ersten Specialregel erhellet, daſs die Factoren H und K nicht gerade einfache oder rationale zu seyn brauchen, sondern vermittelst dieser Regel das Integral gewähren, wenn nur entweder ihre Summe oder ihre Differenz einen constanten Ertrag gewährt, und $dZ = \mathfrak{h}.H$ und $= \mathfrak{k}.K$ mit constanten Factoren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ sich ergibt; welches nun zu noch andern Specialregeln Veranlassung gibt.

Specialregel 2.

§. 13. n mag seyn, welche bejahte oder verneinte, gànze oder gebrochene Zahl es will: so ist $\int\frac{dZ}{N} = \int\frac{d.x^n}{x^n.(a+bx^n)}$ gegeben, auch $= \int\frac{d.bx^n}{bx^n.(a+bx^n)}$, also $H = bx^n$ und $K = a+bx^n$ gesetzt, die Differenz dieser Factoren, $H - K = -a$, ein constanter Ertrag; und da nun auch $dZ = 1.dH$ und $dZ = 1.dK$ ist, so hat man $\mathfrak{h} = 1$ und $\mathfrak{k} = 1$, also nach Formel II) §. 4

$$\int\frac{d.x^n}{x^n(a+bx^n)}$$
$$= \frac{1.\log(a+bx^n) - 1.\log bx^n}{-a} = -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx^n}{bx^n} + C.$$

Da nun

$$\int\frac{d.x^n}{x^n(a+bx^n)} = n\int\frac{x^{n-1}dx}{x^n(a+bx^n)} = n\int\frac{dx}{x(a+bx^n)}\ \text{ist:}$$

so muſs jedes

$\int\frac{dx}{x(a+bx^n)} = -\frac{1}{na}\log\frac{a+bx^n}{bx^n} + C$ seyn, n mag seyn, was es will *).

Specialregel 3.

§. 14. Sey $\frac{dZ}{N} = \int\frac{d\sqrt{-X}}{A+X}$ gegeben, so ist $N = (\sqrt{A}+\sqrt{-X}).(\sqrt{A}-\sqrt{-X})$, welche beide Factoren wir $=$ H, K schreiben wollen.

Da nun $dZ = d\sqrt{-X}$ gegeben ist: so haben wir $dZ = 1.dH$, und $dZ = -1.dK$, also $\mathfrak{h} = 1$ und $\mathfrak{k} = -1$. Und da wir ferner einen constanten Ertrag $\mathfrak{C} = H + K = 2\sqrt{A}$, durch diese Summe der beiden Factoren erhalten: so wissen wir nach Formel I), §. 4, zuvörderst,

dafs $\int\frac{d\sqrt{-X}}{A+X} = \frac{-\log(\sqrt{A}+\sqrt{-X}) + \log(\sqrt{A}-\sqrt{-X})}{2\sqrt{A}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{A}}\log\frac{\sqrt{A}-\sqrt{-X}}{\sqrt{A}+\sqrt{-X}} + C$$

seyn mufs. Nun brauchen wir nur zu bedenken, dafs $d\sqrt{-X} = -\frac{dX}{2\sqrt{X}}$ ist: so haben wir sogleich

---

*) Z. B. für $n = 1$, hat man $\int\frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\left(\log\frac{a+bx}{bx} + \log C\right)$; allerdings auch $= -\frac{1}{a}\left(\log\frac{a+bx}{x} + \log K\right)$, wenn man $K = \frac{c}{b}$ setzt; und demnach auch $= -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{x}K$, wie es in des Hrn. Meier Hirsch Integraltafeln S. 40 aufgeführt ist. Der dortige Beweis scheint unrichtig gedruckt zu seyn.

1) daſs $\int \frac{dX}{(A+X)\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \log \frac{\sqrt{A}-\sqrt{-X}}{\sqrt{A}+\sqrt{-X}} + C$

folglich, da $\int \frac{dX}{(-A-X)\sqrt{X}} = -1 . \int \frac{dX}{(A+X)\sqrt{X}}$ ist,

2) auch $\int \frac{dX}{(-A-X)\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log \frac{\sqrt{A}-\sqrt{-X}}{\sqrt{A}+\sqrt{-X}} + C.$

Wegen X. §. 7. aber wollen wir aus 1) lieber

⊙) $\int \frac{dX}{(A+X)\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log \frac{\sqrt{A}+\sqrt{-X}}{\sqrt{A}-\sqrt{-X}} + C$ folgern,

und dieses als die allgemeine Formel gebrauchen.

§. 15. Da X hierin jede beliebige, algebraische und transcendente Function des x bedeuten kann; so sind hiemit wiederum eine Menge sowol rationaler als irrationaler Integrale gefunden. In Rücksicht auf das Integrand $\int (a+bx^n)\, x^m\, dx$, welches uns hauptsächlich vorkommen wird, laſst uns $X = bx^n$, und $A = a$ setzen, so haben wir $\sqrt{X} = x^{\frac{n}{2}}\sqrt{b}$ und $dX = n\, b x^{n-1}\, dx$,

also $\int \frac{n\, b\, x^{n-1}\, dx}{(a+bx^n)\, x^{\frac{n}{2}} \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx^n}}$, folglich

auch $\int \frac{dx}{(a+bx^n)\, x^{\frac{2-n}{2}}} = \frac{1}{n\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx^n}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx^n}}$

§. 16. Wenn wir daher z. B. nach einander $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $= 4$ setzen; so haben wir

1) $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx}} + C$

2) $\int \frac{a+bx^2}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx^2}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx^2}} + C$

3) $\int \frac{dx . \sqrt{x}}{a+bx^3} = \frac{1}{3\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx^3}} + C$

4) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^4} = \frac{1}{4\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx^4}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx^4}} + C$ u. s. w.

§. 17. Es ist einleuchtend, dafs X und $\mathfrak{X}$ zwei beliebige Functionen des x bedeutend,

$$\text{jedes } \int \frac{dX}{\mathfrak{X}} = \int \frac{X+\mathfrak{X}}{X+\mathfrak{X}} \cdot \frac{dX}{\mathfrak{X}} = \int \frac{1}{\mathfrak{X}+X}\left(\frac{X\,dX}{\mathfrak{X}} + dX\right),$$

folglich jedes solches $\int \frac{dX}{\mathfrak{X}} = \log(X+\mathfrak{X})$ seyn mufs, dessen $\frac{X\,dX}{\mathfrak{X}} = d\mathfrak{X}$, also $\mathfrak{X}\,d\mathfrak{X} = X\,dX$ also $\int \mathfrak{X}\,d\mathfrak{X} = \int X\,dX$; also $\mathfrak{X}^2 = X^2 + C$, folglich $\mathfrak{X} = \sqrt{(X^2+C)}$ ist. Wenn wir nun aufstellen, als

Specialregel 4,

dafs, jedes $\int \frac{dX}{\sqrt{(C+X^2)}} = \log(X+\sqrt{(C+X^2)})$ ist: so können wir aus dieser Form sehr gut beurtheilen, welche von den uns wissenswürdigen Integranden $\int (a+bx^n)^p x^m dx$ durch diese Regel können abgereicht werden.

§. 18. Setzen wir $C = a$ und $X^2 = bx^n$, also $X = x^{\frac{n}{2}}\sqrt{b}$, so ist $dX = \frac{n}{2} x^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{b}$,

$$\text{also } \int \frac{x^{\frac{n-2}{2}}\,dx}{\sqrt{(a+bx^n)}} = \frac{2}{n\sqrt{b}} \log(x^{\frac{n}{2}}\sqrt{b} + \sqrt{(a+bx^n)}).$$

Wenn wir hierin, auf ganze bejahte n uns einschränken, und nach einander $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ setzen: so haben wir

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)}\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \log(\sqrt{b}\sqrt{x} + \sqrt{(a+bx)})$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log(x\sqrt{b} + \sqrt{(a+bx^2)}) + K$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \log \frac{x\sqrt{b}+\sqrt{(a+bx^2)}}{\sqrt{a}},$$ wenn das Integral mit x verschwinden soll.

$$3.\ \int \frac{\sqrt{x}\,.dx}{\sqrt{(a+bx^3)}} = \frac{2}{3\sqrt{b}} \log (x\sqrt{x}\sqrt{b}+\sqrt{(a+bx^3)}$$

$$4.\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx^4)}} = \frac{1}{2\sqrt{b}} \log (xx\sqrt{b}+\sqrt{(a+bx^4)}$$

u. s. w.

§. 19. Unter diesen Gleichungen ist die 2te für uns die merkwürdigste. In Beziehung auf diese das obige $X = x + \frac{\beta}{2\gamma}$ gesetzt, gibt $dX = dx$ und $X^2 = x^2 + \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\beta^2}{4\gamma\gamma}$. Wenn wir nun das obige $C = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$ setzen, so erhalten wir $C + X^2 = x^2 + \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\gamma}$; nach der obigen Regel also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha}{\gamma})}} = \log(x+\frac{\beta}{2\gamma}+\sqrt{(x^2+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha}{\gamma})})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log (x+\frac{\beta}{2\gamma}+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left\{\log \frac{2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{2\gamma} + \log K\right\}$$

§. 20. Soll dieses Integral mit x verschwinden, so muſs $\log K = - \log \frac{\beta+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha}}{2\gamma}$ seyn;

also $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log \frac{2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}.\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{\beta+2\sqrt{\gamma\alpha}.}$

Bei unserer Herleitung desselben erhellet, daſs es eben so auch aus

obigem $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log \frac{(x\sqrt{b}+\sqrt{(a+bx^2)}}{\sqrt{a}}$

sich ergeben müſste, wenn man dessen b = 1, und

$a = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$, auch $x + \frac{\beta}{2\gamma}$ statt x,

also $x^2 + \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$ statt x^2 setzt.

§. 21. Daſs zwischen diesen beiden Formeln solch eine leicht zu bestimmende Abhängigkeit werde Statt finden müssen, war im Voraus zu vermuthen, da ja in beiden die Stammgröſse ein quadratisches Aggregat, die eine ein reines, die andere ein unreines ausmacht, und es uns aus den Lehren der Algebra sehr bekannt ist, daſs sowol alle eigenthümlichen, als alle gemeinschaftlichen Eigenschaften solcher Aggregate, in verschiedenen und von einander abhängigen Gröſsen ihrer constanten Coefficienten bestehen. Das deutliche Bewuſstseyn dieser Abhängigkeit wird uns schon hier in §. 26., besonders aber auch späterhin, wo wir die trigonometrischen Ausdrücke der Integranden zu finden haben, vielen sonst dabei gewöhnlichen, mühsamen Calcul ersparen helfen.

§. 22. Wenn wir in dem allgemeinen, mit $x = 0$ sich vernullenden Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log \frac{2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}.\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}{\beta + 2\sqrt{\gamma\alpha}}.$$

den Coefficienten $\gamma = 0$ setzen wollen: so würden wir es $= \log \frac{\beta}{\beta} = \log 1 = 0$ erhalten, und diese Unbestimmtheit zu heben, weit mehr Mühe haben, als wenn wir unmittelbar schlieſsen,

daſs $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x)}} = \int(\alpha+\beta x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\beta}\int(\alpha+\beta x)^{-\frac{1}{2}} \beta\, dx$,

also (Cap. I. §. 21.) $= \frac{2}{\beta} (\alpha+\beta x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\beta} \sqrt{(\alpha+\beta x)} + C$

seyn muſs;

und $= \frac{2}{\beta}\left(\sqrt{(\alpha+\beta x)} - \sqrt{\alpha}\right)$, wenn es mit $x = o$ verschwinden soll.

§. 23. Eben das allgemeine Integral auf $\beta = o$ eingeschränkt,

gibt $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log \frac{2\gamma x + 2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$

also auch $= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log \frac{x\sqrt{\gamma} + \sqrt{(\alpha+\gamma x^2)}}{\sqrt{\alpha}}$; wie in §. 4. No. 2.

§. 24. Eben das allgemeine Integral auf $\alpha = o$ eingeschränkt,

gibt $\int \frac{dx}{\sqrt{(\beta x+\gamma x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log \frac{2\gamma x + \beta + 2\sqrt{\gamma}\sqrt{(\beta x+\gamma x^2)}}{\beta}$

§. 25. Aus jedem der bisher gefundenen Integrale müssen sich nun, vermittelst der uns bekannt gewordenen Reductionsgleichungen, viel andere Integrale finden lassen, von denen ich nur das für uns wichtige $\int\sqrt{(a+bx^2)}\,dx$ aufführen will.

§. 26. Da $\int (a+bx^n)^p x^m dx$ (nach C. VII. §. 13. IV. 1.) $= \frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{np+m+1} + \frac{npa}{np+m+1}\int (a+bx^n)^{p-1} x^m dx$ ist: so muſs $\int (a+bx^2)^{\frac{1}{2}} x^0 dx$

$$= \frac{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} x}{1+1} + \frac{a}{2}\int (a+bx^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

das ist, $\int \sqrt{(a+bx^2)}\,dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{(a+bx^2)} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} \text{ seyn.}$$

Folglich, nach §. 20., dieses $a = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$, und

$b = 1$, auch $x + \frac{\beta}{2\gamma}$ statt x, also $x^2 + \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$ statt x^2 geschrieben, sogleich auch

$$\int \sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}\, dx$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta\gamma+\gamma x^2)}}.$$

§. 27. *Specialregel 5.*

Wenn $\int\frac{dZ}{N} = \frac{1}{a}\left[\log(A+X) - \log(\mathfrak{A}+\mathfrak{X})\right]$ seyn soll, wo Z und N gegebne, X und $\mathfrak{X}$ gesuchte Functionen des x sind: so mufs $a\frac{dZ}{N} = \frac{dX}{A+X} - \frac{d\mathfrak{X}}{\mathfrak{A}+\mathfrak{X}}$ vermittelst drei constanter Gröfsen, a, A und $\mathfrak{A}$ seyn können.

§. 28. *Beispiel.*

Sey $\int\frac{dZ}{N} = \int\frac{dx}{(c+x)(a+bx)}$ gegeben, und werde Versuchsweise $A + X = c + x$, und $\mathfrak{A} + \mathfrak{X} = a + bx$ gesetzt: so ist der Versuch gerechtfertigt, wenn durch ein constantes a die Gleichung $a\,dx = (a+bx)\,dx - (c+x)\,bx'\,dx$ geleistet werden kann. Da nun dieses durch $a = a - bc$ geschieht: so ist es gewifs,

$$\text{dafs}\ \int\frac{dx}{(c+x)(a+bx)} = \frac{1}{a-bc}\left(\log(c+x) - \log(a+bx)\right)$$

seyn mufs.

Bei $c = o$ also $\int\frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a+bx}.$

Zusatz zur obigen Regel.

§. 29. Wenn von den beiden veränderlichen Factoren des N auch nur ein binomischer quadratisch

irrational ist: so muſs wenigstens eine von den gesuchten Functionen X und $\mathfrak{X}$ ebenfalls quadratisch irrational seyn. Werde nun die zweite als ein $= \sqrt{\mathfrak{X}}$ angesetzt: so hat man $d\sqrt{\mathfrak{X}} = \frac{d\mathfrak{X}}{2\sqrt{\mathfrak{X}}}$, also

$$\mathfrak{a}\frac{dZ}{N} \overset{?}{=} \frac{2(\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{X}})\sqrt{\mathfrak{X}}.dX-(A+X)\,d\mathfrak{X}}{2(A+X)(\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{X}})\sqrt{\mathfrak{X}}}$$ zu erfragen.

Beispiel.

§. 30. Sey $\int\frac{dZ}{N} = \int\frac{dx}{(c+x)\sqrt{(a+bx^n)}}$ gegeben, so erhellet bald, daſs die Gleichung für $\mathfrak{a}\frac{dZ}{N}$ nur bei gegebnem $c = 0$ und $n = 2$, durch constante $\mathfrak{a}$, A und $\mathfrak{A}$ kann geleistet werden.

Bei gegebnem $\int\frac{dZ}{N} = \int\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx^2)}}$ aber $X = x$ und $\mathfrak{X} = a+bx^2$ gesetzt, hat man die Fragegleichung

$$\frac{\mathfrak{a}.dx}{x\sqrt{(a+bx^2)}} \overset{?}{=} \frac{2(\mathfrak{A}.\sqrt{\mathfrak{X}}+\mathfrak{X})\,dx-(A+x)\,2bx\,dx}{2(A+x)(\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{X}})\sqrt{(a+bx^2)}};$$

also $A = 0$ angenommen,

$$\mathfrak{a} \overset{?}{=} \frac{\mathfrak{A}.\sqrt{\mathfrak{X}}+a+bx^2-bx^2}{\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{X}}}$$

also $\mathfrak{a}\mathfrak{A}+\mathfrak{a}\sqrt{\mathfrak{X}} = \mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{X}}+a$; woraus erhellet, daſs $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}$, und $\mathfrak{a}\mathfrak{A} = a$, also $\mathfrak{a} = \sqrt{a}$, und $\mathfrak{A} = \sqrt{a}$ zu nehmen ist. Ist also hiermit gewiſs, daſs

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{x}{\sqrt{(a+bx^2)}+\sqrt{a}} \quad \text{seyn}$$

muſs; welches nun auch den einfachsten unter allen Ausdrücken dieses Integrales ausmacht.

§. 31. Allerdings kann daraus gefolgert werden, daſs es

auch $= \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{x^2}{(\sqrt{(a+bx^2)}+\sqrt{a})^2}$ seyn muſs, folglich

auch $= \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{a+bx^2-a}{b(\sqrt{(a+bx^2)}+\sqrt{a})^2}$, also

auch $= \frac{1}{2\sqrt{a}} \left\{ \log \frac{\sqrt{(a+bx^2)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx^2)}+\sqrt{a}} - \log b \right\}$; welches bloſs in der Integralsconstante von dem Ausdrucke verschieden ist, dessen sich Hr. **Meier Hirsch** in seinen Tafeln bedient.

§. 32. Wünschen wir uns der Constante $-\log b$ entledigt zu sehen, so können wir schlieſsen, daſs für $b = 1$ sich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+x^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{(a+x^2)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+x^2)}+\sqrt{a}} - 0 \text{ ergibt.}$$

Und hierin $\frac{a}{b}$ statt a gesetzt, sich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{(a+bx^2)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx^2)}+\sqrt{a}} \text{ ergibt, wie}$$

bei Hrn. **Hirsch.**

Zweiter Zusatz zur obigen Regel.

§. 33. Aus dem Anfange des §. 30 ist es schon gewiſs genug, daſs z. B. für das Integrand $\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)}}$ die Fragegleichung in §. 29. nicht brauchbar seyn würde, folglich zwei quadratisch irrationale Functionen $A + \sqrt{X}$ und $\mathfrak{A} + \sqrt{\mathfrak{X}}$ gesucht werden müssen.

Soll nun $\int \frac{dZ}{N} = \frac{1}{a}\left(\log(A+\sqrt{X}) - \log(\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{X}})\right)$ seyn, so muſs

$$\frac{\mathfrak{a}\,dZ}{N} = \frac{d\sqrt{X}}{A+\sqrt{X}} - \frac{d\sqrt{\mathfrak{X}}}{\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{X}}},$$

also $\dfrac{2\mathfrak{a}\,dZ}{N} = \dfrac{dX}{(A+\sqrt{X})\sqrt{X}} - \dfrac{d\mathfrak{X}}{(\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{X}})\sqrt{\mathfrak{X}}},$

also $\dfrac{2\mathfrak{a}\,dZ}{N} = \dfrac{(\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{X}}+\mathfrak{X})\,dX - (A\sqrt{X}+X)\,d\mathfrak{X}}{(A+\sqrt{X})(\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{X}})\sqrt{X}.\sqrt{\mathfrak{X}}}$ seyn.

§. 34. Können vielleicht die beiden gesuchten $\sqrt{\mathfrak{X}}$ und $\sqrt{X}$ einander gleich seyn, welches man vor allem andern zu versuchen hat: so muſs

$$\frac{2\mathfrak{a}\,dZ}{N} = \frac{(\mathfrak{A}-A).\,dX}{(A+\sqrt{X})(\mathfrak{A}+\sqrt{X}).\sqrt{X}} \text{ seyn.}$$

Sey nun das obige $\dfrac{dZ}{N} = \dfrac{dx}{x\sqrt{(a+bx)}}$ gegeben, und $\sqrt{X} = \sqrt{(a+bx)}$ gesetzt: so ist die Fragegleichung

$$\frac{2\mathfrak{a}}{x} \overset{?}{=} \frac{(\mathfrak{A}-A).b}{(A+\sqrt{X})(\mathfrak{A}+\sqrt{X})}, \text{ also}$$

$$2\mathfrak{a}(A\mathfrak{A} + (A+\mathfrak{A})\sqrt{X} + a+bx) = (\mathfrak{A}-A)\,bx;$$

muſs also $A+\mathfrak{A} = o$, also $A = -\mathfrak{A}$ (oder $\mathfrak{A} = -A$) genommen werden. Das erste gewählt, hat man $\mathfrak{A}-A = 2\mathfrak{A}$,

$$\text{also } -2\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{A} + 2\mathfrak{a}a + 2\mathfrak{a}bx \overset{?}{=} 2\mathfrak{A}bx.$$

Wegen der veränderlichen Glieder erfordert die Gleichung, daſs $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}$ sey, wegen der übrigen constanten also $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = a$, also $\mathfrak{A} = \sqrt{a}$, und daher auch $\mathfrak{a} = \sqrt{a}$; und so ist hiemit gewiſs,

daſs $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{(a+bx)}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \log \dfrac{\sqrt{(a+bx)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx)}+\sqrt{a}}$ seyn muſs.

§. 35. Will man $\int \dfrac{dx}{(x-c)\sqrt{(a+bx^2)}}$ vermittelst der Form in §. 33. zu finden suchen, so ergibt sich,

dafs sie dazu nicht hinreichend ist, sondern die Form

$$\int \frac{dZ}{N} = \frac{1}{a} \log(A + Fx + G\sqrt{X}) - \log(\mathfrak{A} + \sqrt{\mathfrak{X}})$$ mit

constanten Factoren F und G vorauszusetzen, sey, wodurch man

$$\int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{(a+bx^2)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(a-bcc)}} \log \frac{2(a-bcc)-bcc+2bcx-2\sqrt{(a-bcc)}\sqrt{(a+bx^2)}}{x-c}$$

findet, und woraus sich dann durch die Substitutionen $a = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$; $b = 1$, und $x = \mathfrak{x} - \frac{\beta}{2\gamma}$ (§. 19.) auch

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log \frac{2\alpha + \beta\mathfrak{x} - 2\sqrt{\alpha}.\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{x} + \gamma x^2)}}{\mathfrak{x}}$$ ergeben würde. Indessen werden wir zu den uns bedürftigen Integralen dieser Art, mit den drei ersten obigen Formen ausreichen; daher ich mir auch nicht erlaube, diese Formen-Benutzung noch allgemeiner zu behandeln.

Anmerkung.

§. 36. In dem letzten Integrale $\beta = 0$ gesetzt, auch a, b, x statt α, β, $\mathfrak{x}$ geschrieben, gibt

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bxx)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{2a - 2\sqrt{a}.\sqrt{(a+bxx)}}{x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \log \frac{\sqrt{a} - \sqrt{(a+bxx)}}{x} + \log 2\sqrt{a} \right\};$$

im veränderlichen Theile also

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a} - \sqrt{(a+bxx)}}{x},$$

da wir es hingegen $= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{x}{\sqrt{(a+bxx)}+\sqrt{a}}$ in §. 30. gefunden haben. Die Uebereinstimmung dieser beiden Ausdrücke ist in X. §. 6. schon erwiesen.

Zwölftes Capitel.

Aufstellung einiger als Logarithmen oder Kreisbogen gefundenen $\int(a+bx^n)^p x^m dx$.

§. 1. Aus den acht Differentialen der acht trigonometrischen geraden Hülfslinien, Sinus und Cosinus, Tangente und Cotangente, u. s. w., jede als Function des ihr zugehörigen kleinsten mit ihr veränderlichen Kreisbogens betrachtet, wie sie in Diff. R. Cap. XI. Seite 157. aufgeführt waren, wurde in Integr. R. Cap. VIII. geschlossen, dafs man das Integrand $\int(1+1.\mathfrak{x}^n)^p \mathfrak{x}^m d\mathfrak{x}$ für 4 Fälle desselben, nämlich

$$1)\ \pm \int \frac{d\mathfrak{x}}{1+\mathfrak{x}\mathfrak{x}} = \text{arc} \begin{matrix} \text{tang}\ \mathfrak{x} \\ \text{cotang}\ \mathfrak{x} \end{matrix}$$

$$2)\ \pm \int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \text{arc} \begin{matrix} \sin\ \mathfrak{x} \\ \text{cosin}\ \mathfrak{x} \end{matrix}$$

$$3)\ \pm \int \frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x}-1)}} = \text{arc} \begin{matrix} \sec\ \mathfrak{x} \\ \text{cosec}\ \mathfrak{x} \end{matrix}$$

$$4)\ \pm \int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(2\mathfrak{x}-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \text{arc} \begin{matrix} \sin\ \text{vers}\ \mathfrak{x} \\ \text{cosin}\ \text{vers}\ \mathfrak{x} \end{matrix}$$

als einen Kreisbogen vermittelst der trigonometrischen Tafeln so gut als schon berechnet hinreichend genau vorfinden kann, jede dieser Linien $\mathfrak{x}$ die Länge 1) einer $\begin{matrix}\text{Tangente}\\ \text{Cotangente}\end{matrix}$ oder 2) eines $\begin{matrix}\text{Sinus}\\ \text{Cosinus}\end{matrix}$ u. s. w.

bedeutend, welche nach einer linearen Einheit gemessen wird, die den Halbmesser des Kreises ausmacht, in welchem sie als Tangente, oder Cotangente u. s. w. angelegt ist.

§. 2. Nachdem aus diesen 4 Fallen, in welchen die Coefficienten a und b in der binomischen Stammgröfse des obigen Integranden auf $a = 1$ und $b = 1$ eingeschränkt waren, auch die 4 allgemeineren Fälle für jedes a und b, ebenfalls als Kreisbogen integrirbar dargestellt waren, wie man sie Seite 144, 146 und 148 aufgeführt findet: so waren eben dadurch diese 4 Fälle weit allgemeiner anstellig abgereicht *).

§. 3. Neben diesen 4 Fällen des $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ als Kreisbogen gefunden, gibt es nun 4 ähnliche Fäl-

---

*) Da die graphische Darstellung dieser Ableitungen in VIII. §. 13. aus Versehen dort ungedruckt geblieben ist, so mag sie zum Besten einiger Anfänger noch hier mitgetheilt werden.

In Fig. 22. sey $\mathfrak{bb} = \mathfrak{x} = \sin \operatorname{arc} \mathfrak{ab}$, und der Kreishalbmesser $C\mathfrak{a} = 1$; so hat man

$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{xx})}} = \operatorname{arc} \sin \mathfrak{bb} = \operatorname{arc} \mathfrak{ab}$. (Die Integralconstante $= 0$ gefordert, damit das Integral $\operatorname{arc} \sin \mathfrak{x} = \mathfrak{ab}$ zugleich mit des veränderlichen Sinus $\mathfrak{x} = \mathfrak{bb}$ Anfangsgränze $\mathfrak{x} = 0$, seinen Anfang nehme. Für den einzelen Werthfall $\mathfrak{x} = \frac{3}{4} . 1 = 0,75$ würde sich also dieses Integral $= 0,8479....$ ergeben. [VIII. §. 5.])

Sey dagegen $DB = x = \sin \operatorname{arc} AB$ für den Halbmesser $CA = 1\sqrt{\frac{a}{b}}$: so hat man

$$CB : C\mathfrak{b} = DB : \mathfrak{bb}$$

$$\text{als } \sqrt{\frac{a}{b}} : 1 = x : \mathfrak{x}$$

also $\mathfrak{x} = x\sqrt{\frac{b}{a}}$ und, $d\mathfrak{x} = dx\sqrt{\frac{b}{a}}$; und so mufs

le dieses Integranden, welche bloſs durch die ∓ ihrer a und b von jenen verschieden, und eben deſshalb als mögliche Logarithmen darstellig sind, wo jene, dieser Zeichen wegen, nur unmögliche Kreisbogen fordern würden. Diese logarithmischen Integrale findet man auf Seite 145, 147 und 149 vorläufig

---

$$\text{arc}\,\mathfrak{ab} = \int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \int \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-xx\frac{b}{a})}}$$

$$= \sqrt{b} \int \frac{dx}{\sqrt{(a-bxx)}}$$

Folglich $\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bxx)}} = \frac{\text{arc}\,\mathfrak{ab}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(1-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin}\,\mathfrak{x} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin}\, x \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ seyn.}$$

Eben so hat man sich in Fig. 23. ebenfalls den Halbmesser CA $= \sqrt{\frac{a}{b}}$ zu denken, um auch aus den obigen 1) und 3) die Integrale

$\int \frac{dx}{a+bxx} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{arc tang}\, x \sqrt{\frac{b}{a}}$, und

$\int \frac{dx}{x\sqrt{(-a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arc sec}\, x \sqrt{\frac{b}{a}}$ anschaulich gefolgert zu sehen.

Für die Integrale 4) $\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(2\mathfrak{x}-\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}$ = arc sin vers $\mathfrak{x}$ und $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax-bxx)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin vers} \frac{2b}{a} x$ aber hat man sich, um das letzte aus dem ersten durch CD = x = sin vers arc AB bedeutend, anschaulich gefolgert zu sehen, den Halbmesser CA $= \frac{a}{2b} \cdot 1$ zu fordern. Denn

$$\text{da nun CB : C}\mathfrak{b} = \text{DA} : \mathfrak{da}$$

$$\text{als } \frac{a}{2b} : 1 = x : \mathfrak{x}$$

uns $\mathfrak{x} = \frac{2b}{a} x$, folglich $d\mathfrak{x} = \frac{2b}{a} dx$ gibt: so haben wir

mit aufgeführt, obgleich sie erst in den folgenden IXten, Xten und XIten Kapiteln nach und nach zu erweisen waren. In diesen Kapiteln aber sind noch weit mehre Fälle des $\int(a+bx^n)^p x^m dx$ logarithmisch integrabel gefunden worden; und für einige derselben war es schicklich, auch ihnen ähnliche, als Kreisbogen integrirt aufzuführen. In dem folgenden Verzeichnisse wird man nun alle hieher gehörigen Integrale aufgeführt und nachgewiesen finden, welche von Hrn. Meier Hirsch in denen Integraltafeln, deren wir bedürfen möchten, als bekannt vorausgesetzt werden.

§. 4.

1) $\int\frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\log(a+bx)$ (Cap. IX. §. 28. No. 5.)

2) $\int\frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\log\frac{a+bx}{a} = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a+bx}$ (Cap. XI. §. 28.)

3) $\int\frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tang} x\sqrt{\frac{b}{a}}$ (Seite 144.)

4) $\int\frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}}$ (Cap. X. §. 6, 7, 8.)

5) $\int\frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\log(a+bx^2)$ (Cap. X. §. 3. No. 6.)

$$\text{arc}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \int\frac{d\xi}{\sqrt{(2\xi-\xi\xi)}} = \int\frac{2b}{a}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2.2b}{a}x-\frac{4bb}{aa}xx\right)}}$$

$$= \int\sqrt{b}\frac{dx}{\sqrt{(ax-xx)}},$$

$$\text{also } \int\frac{dx}{\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\text{arc}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{d\xi}{\sqrt{(2\xi-\xi\xi)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}\text{arc sin vers}\,x = \frac{1}{\sqrt{b}}\text{arc sin vers}\,\frac{2b}{a}x.$$

6) $\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{2-n}{2}}} = \frac{1}{n\sqrt{ab.}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx^n.}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx^n.}}$ (Cap. IX. §. 36. und XI. §. 12 u. 14.)

Dieses vielumfassende Integral wird einige von denen zwischen Seite 16 und Seite 61 in den Integraltafeln vorausgesetzten Integralen gewähren. Andere derselben wird man im XIIIten oder XIVten Kapitel erörtert finden.

7) $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{(4ac-bb)}} \text{ arc tang } \frac{2cx+b}{\sqrt{(4ac-bb)}}$ (Beweis folgt in §. 5.)

8) $\quad , \quad = \frac{1}{\sqrt{(bb-4ac)}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{(bb-4ac)}}{2cx+b+\sqrt{(bb-4ac)}}$ (Cap. XI. §. 20.)

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)}} = \frac{2}{b} \cdot \mp\sqrt{(a+bx)} \pm \sqrt{a}$ (Cap. IX. §. 28. No. 9. und Cap. XI. §. 21.)

10) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{(a+bx)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx)}+\sqrt{a}}$ (C. IX. §. 34)

11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(bx-a)}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \text{ arc cos } \sqrt{\frac{a}{bx}}$ (Beweis §. 8.)

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bxx)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log[x\sqrt{b}+\sqrt{(a+bxx)}]$ (Cap. XI. §. 4. No. 2.)

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a-bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc sin } x\sqrt{\frac{b}{a}}.$ (Seite 146.)

13*) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{ arc sin } x\sqrt{\frac{-b}{a}}$ (Folgerung aus 13.)

14) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{x}{\sqrt{(a+bx^2)}+\sqrt{a}}$ (C. XI. §. 30.)

$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{(a+bx^2)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx^2)}+\sqrt{a}}$ (C. XI. §. 32.)

15) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{(-a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{arc sec } x\sqrt{\frac{b}{a}}.$ (Seite 146.)

16) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(ax+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log\frac{\sqrt{(ax+bx^2)}+x\sqrt{b}}{\sqrt{(ax+bx^2)}-x\sqrt{b}}$

17) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(ax-bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin vers}\frac{2bx}{a} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc cos}\frac{a-2bx}{a}$

(S. 148.)

auch $\displaystyle= \frac{2}{\sqrt{b}} \text{arc sin}\sqrt{\frac{bx}{a}}$ (Beweis im folgenden §. 9.)

18) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log\left[\frac{2cx+b+2\sqrt{c}.\sqrt{(a+bx+cx^2)}}{b+2\sqrt{ac}}\right]$

(Cap. XI. § 20.)

19 a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{arc sin}\frac{2cx+b}{\sqrt{(bb-4ac)}}$

20 a) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-cxx)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc sin}\frac{b-2cx}{\sqrt{(bb+4ac)}}$

(Der Beweis für 19 a und 20 a folgt in §. 6.)

19 b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}} = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \text{arc sin}\frac{2cx+b}{\sqrt{(bb-4ac)}}$

20 b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc sin}\frac{2cx-b}{\sqrt{(bb+4ac)}}$

(Der Beweis für 19 b und 20 b folgt in §. 7.)

(Alle bisher behandelten trigonometrischen Integrale sind als Kreisbogen einer gegebnen trigonometrischen Hülfslinie zugehörig, gefunden. Andere als trigonometrische Functionen aufzufindende Integrale, welche eine Vervielfachung der trigonometrischen Linien, oder ihrer Kreisbogen voraussetzen, schienen mir rathsamer, in dem folgenden Kapitel zusammen gestellt werden.)

Beweis für No. 7.

§. 5. In der Formel 3) zuvörderst $b = 1$ gesetzt,

gibt $\int \frac{dx}{a+xx} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{a}}$. Wird hierin ferner (M. s. Cap. XI. §. 20.)

$x = \mathfrak{z} + \frac{\beta}{2\gamma}$ und $a = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$ gesetzt: so hat man

$dx = d\mathfrak{z}$ und $a + xx = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\mathfrak{z} + \mathfrak{z}\mathfrak{z}$,

also $\int \frac{d\mathfrak{z}}{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\mathfrak{z} + \mathfrak{z}\mathfrak{z}} = \frac{2\gamma}{\sqrt{(4\alpha\gamma - \beta\beta)}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2\gamma\mathfrak{z} + \beta}{\sqrt{(4\alpha\gamma - \beta\beta)}}$

also auch

$$\int \frac{d\mathfrak{z}}{\alpha + \beta\mathfrak{z} + \gamma\mathfrak{z}\mathfrak{z}} = \frac{2}{\sqrt{(4\alpha\gamma - \beta\beta)}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2\gamma\mathfrak{z} + \beta}{\sqrt{(4\alpha\gamma - \beta\beta)}}.$$

Beweis für No. 19 und 20.

§. 6. In No. 13* zuvörderst $b = 1$ gesetzt, gibt $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+xx)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{arc\,sin} x \sqrt{\frac{-1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{-a}}$.

Hierin wiederum $x = \mathfrak{z} + \frac{\beta}{2\gamma}$ und $a = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$ gesetzt, hat man

$\int \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\mathfrak{z} + \mathfrak{z}\mathfrak{z}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{arc\,sin} \frac{2\gamma\mathfrak{z} + \beta}{\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma)}}$, also

auch $\int \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{z} + \gamma\mathfrak{z}\mathfrak{z})}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \operatorname{arc\,sin} \frac{2\gamma\mathfrak{z} + \beta}{\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma)}} + K \ldots\ldots (A$

und $\int \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{z} - \gamma\mathfrak{z}\mathfrak{z})}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{arc\,sin} \frac{\beta - 2\gamma\mathfrak{z}}{\sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}} + K \ldots\ldots (B$

also $\int \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{z} - \gamma\mathfrak{z}\mathfrak{z})}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left\{ \operatorname{arc\,sin} \frac{\beta - 2\gamma\mathfrak{z}}{\sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}} - \operatorname{arc\,sin} \frac{\beta}{\sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}} \right\} \ldots\ldots (B'$

wenn das Integral B' mit $\mathfrak{z} = 0$ verschwindend seyn soll.

Anmerkung.

§. 7. In den Integraltafeln S. 183. steht aufgeführt

$$\int\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\alpha+\beta\mathfrak{x}+\gamma\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}=\frac{-1}{\sqrt{-\gamma}}\text{ arc sin }\frac{2\gamma\mathfrak{x}+\beta}{\sqrt{(\beta\beta-4\alpha\gamma)}}+C\ldots(\mathfrak{A}$$

und $$\int\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\alpha+\beta\mathfrak{x}-\gamma\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\text{ arc sin }\frac{2\gamma\mathfrak{x}-\beta}{\sqrt{(\beta\beta+4\alpha\gamma)}}+C\ldots(\mathfrak{B}$$

Das erste von uns durch ($\mathfrak{A}$ bezeichnete Integral ist gerade die Gegengröſse unsers vorhin gefundenen (A. Zuvörderst könnte man vermuthen, daſs der Verfasser sein Integral auf dem gewöhnlichen Wege des Rationalmachens gefunden habe, wobei denn leicht eine Umwechselung des $\mp$ sich einschleichen kann. Denn wenn wir auf unserm kürzeren Wege die Formel ($\mathfrak{A}$ erhalten wollen, so würden wir

$x=-\mathfrak{x}+\frac{\beta}{2\gamma}$, und übrigens wie vorhin

$a=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$ ansetzen müssen; indem alsdann $dx=-d\mathfrak{x}$, und das übrige wie vorhin sich ergibt. (Noch lieber würden wir nach unserer allgemeinen Bemerkung, daſs jedes $-d\,\text{arc sin}\,X=d\,\text{arc cos}\,X$ ist, hier zu schlieſsen wissen, daſs aus unserm (A

auch $$-\int\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\alpha+\beta\mathfrak{x}+\gamma\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}=\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\text{ arc cosin }\frac{2\gamma\mathfrak{x}+\beta}{\sqrt{(\beta\beta-4\alpha\gamma)}}+C$$

sich ergeben muſs.)

Nächst jener Vermuthung aber wollen wir hier auch bedenken, daſs für mögliche Sinus statt

des $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+xx)}}$ vielmehr $\int\frac{dx}{\sqrt{(a-xx)}}$ gehört;

weil ja $\int\frac{dx}{\sqrt{(a-xx)}}=\frac{1}{\sqrt{1}}.\text{arc sin}\,x\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{1}}\sin\frac{x}{\sqrt{a}}$ für

alle $\frac{x}{\sqrt{a}}$, nicht >1, allemal mögliche Sinus gewährt.

Wenn wir nun hierin $x = \mathfrak{x} - \frac{\beta}{2\gamma}$, und $a = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\beta}{4\gamma\gamma}$ ansetzen, so haben wir $a - xx = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\mathfrak{x} - \mathfrak{x}\mathfrak{x}$, also

$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{x} - \gamma\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma\mathfrak{x} - \beta}{\sqrt{(\beta\beta + 4\alpha\gamma)}}$, völlig gleich der obigen (𝔅 in den Integraltafeln.

Da nun diese Gleichung (𝔅 aus dem für mögliche Sinus unmittelbar anstelligen $\int \frac{dx}{\sqrt{(a - xx)}}$ durch die einfache Substitution $x = \mathfrak{x} - \frac{\beta}{2\gamma}$ sich ergibt: so war es schicklich, diese (𝔅 am liebsten in Gebrauch zu nehmen, und daher auch ihr gemäſs, statt unserer obigen (A lieber die ebenfalls richtige (𝔄

$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{x} + \gamma\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \frac{-1}{\sqrt{-\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma\mathfrak{x} + \beta}{\sqrt{(\alpha\beta - 4\alpha\gamma)}}$ anzusetzen.

Denn da aus dieser Gleichung

auch $\frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{x} + \gamma\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \text{ arc sin } \frac{-2\gamma\mathfrak{x} - \beta}{\sqrt{(\alpha\beta - 4\alpha\gamma)}}$

als richtig folgt (weil der Gegengröſse eines Sinus auch die Gegengröſse seines Bogens zugehört): so haben wir, nun auch $-\gamma$ statt $+\gamma$ gefordert, daſs

$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\alpha + \beta\mathfrak{x} - \gamma\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma\mathfrak{x} - \beta}{\sqrt{(\alpha\beta + 4\alpha\gamma)}}$ seyn

muſs; und sehen hieraus, daſs diese Gleichungen (𝔅 und (𝔄 in den Tafeln einander zugehörig sind; und der Verfasser auch hierin diejenigen Ausdrücke gewählt hat, welche für den Gebrauch die schicklichsten waren.

(Noch vielerlei andere Ausdrücke dieser beiden Integranden, welche von verschiedenen Mathematikern verschieden aufgeführt werden, müssen sämmtlich aus den hier behandelten, durch bekannte Formeln der analytischen Trigonometrie sich ergeben können; daher wir durch unsere hier mitgetheilte Bemerkung auch uns sichern können, dafs wir von jenen Formeln nicht zwei solche einander zugehörig glauben, von denen die eine ein $x = \mathfrak{x} \mp \frac{\beta}{2\gamma}$, die andere ein $x = -\mathfrak{x} \mp \frac{\beta}{2\gamma}$ in dem binomischen Integrand voraussetzen müfste. Auch werden wir in solchen Fällen, wo eine Verwechselung zwischen $+0$ und -0, wegen $+0 = \frac{1}{+\infty}$, und $-0 = \frac{1}{-\infty}$ in äufserst paradoxe Sätze führen kann, uns aufs reine zu bringen wissen.)

§. 8. *Beweis für No. 11.*

In der letzten obigen Gleichung, wie sie in den Integraltafeln steht,

$$\int \frac{d\mathfrak{x}}{\sqrt{(\alpha+\beta\mathfrak{x}-\gamma\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma\mathfrak{x}-\beta}{\sqrt{(\alpha\beta+4\alpha\gamma)}},$$

werde $\mathfrak{x} = z^n$ gesetzt; so hat man $dz = nz^{n-1} dz$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{x} = z^{2n}$, also diese Gleichung nunmehr als

$$\int \frac{n\,dz}{\sqrt{(\alpha z^{2-2n}+\beta z^{2-n}-\gamma z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma z^n-\beta}{\sqrt{(\alpha\beta+\alpha\gamma)}}.$$

Um aus diesem Integrand mit trinomischer Stammgröfse, auf diejenigen mit binomischer Stammgröfse zu schliefsen, dürfen wir etwa $\alpha = 0$ nicht setzen, indem sich von vorne her übersehen läfst, dafs dadurch die bestimmenden Relationen wegfallen würden. Wenn wir aber $\beta = 0$ setzen; so haben wir

$$\int \frac{n\,dz}{\sqrt{(\alpha z^{2-2n}-\gamma z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } \frac{2\gamma z^n}{\sqrt{\alpha\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ arc sin } 2z^n\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}},$$

wodurch nun viele quadratisch irrationale Integranden sogleich integrirt sind.

Da z. B. das Integrand No. 11.

$\int \frac{dx}{x\sqrt{(bx-a)}}$ auch $= \int \frac{dx}{\sqrt{(bx^3-ax^2)}}$ ist: so hat man, um $2-2n=3$ zu erhalten, $n=-\frac{1}{2}$ zu nehmen, welches uns

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(\alpha z^3-\gamma z^2)}} = \frac{-2}{\sqrt{\gamma}} \text{arc sin} \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha z}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \text{arc cos} \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha z}},$$

also $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx^3-ax^2)}} = \frac{2}{\sqrt{a}} \text{arc cos} \sqrt{\frac{a}{bx}}$ giebt.

§. 9.

Um in der Gleichung

$\int \frac{n\,dz}{\sqrt{(\alpha z^{2-2n}-\gamma z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{arc sin}\, 2z^2 \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$ den Exponenten $2-2n=1$ zu erhalten, mufs man $n=\frac{1}{2}$ setzen, welches uns

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(\alpha z-\gamma zz)}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \text{arc sin}\, 2\sqrt{\frac{\gamma z}{\alpha}},$$

also $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax-bxx)}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \text{arc sin}\, 2\sqrt{\frac{bx}{a}}$ gibt.

Dreizehntes Capitel.

Integranden mit mehrfach dimensionirten trigonometrischen Linien.

§. 1.

Zum Beispeil das nachher (Formel 15) §. 11.) behandelte Integrand $\int \sin\varphi^m d\varphi$, ist der algebraisch integrierbaren Form $\int X^p dX$ nicht unterworfen, kann auch vermittelst eines constanten Hülfsfactors ihr nicht unterworfen werden. Vermittelst eines veränderlichen, $\cos\varphi$, würden wir dasselbe

$$= \int \frac{1}{\cos\varphi} \sin\varphi^m \cos\varphi\, d\varphi = \int \frac{1}{\cos\varphi} (\sin\varphi)^m\, d\sin\varphi$$

erhalten, dessen $d\sin\varphi$ nun allerdings das Differential der Stammgröfse $\sin\varphi$ ausmacht. Da auch ferner $\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{(1-\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-\sin\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$ durch das Binomialtheorem eine Reihe gibt, welche mit $\sin\varphi^m$ multiplicirt, in jedem ihrer Glieder, der Form $\int A(\sin\varphi)^N d\sin\varphi$ mit constantem N und A unterworfen, also algebraisch oder logarithmisch integrirbar ist: so würde hiemit dieses Integral allemal allerdings, aber allemal als eine unendliche Reihe gefunden werden.

In dieser Hinsicht würden wir besser schliefsen, dafs

$$\int \sin\varphi^m d\varphi = \int \sin\varphi^{m-1} \sin\varphi\, d\varphi = \int \sin\varphi^{m-1}\, d\cos\varphi,$$

also auch $= \int (1-\cos\varphi^2)^{\frac{m-1}{2}} d\cos\varphi$ seyn mufs, da dann diese binomische Potenz, in ihre Reihe aufgelös't, ebenfalls lauter integrierbare Glieder nicht nur giebt, sondern auch mit einer endlichen Gliederzahl

abbrechend seyn mufs, falls $m = 2r+1$, nämlich m irgend eine bejahte ganze ungerade Zahl ist.

§. 2. Das in §. 5 und ferner behandelte Integrand $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ würde

nicht nur 1) als $= \int \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^n d\cos\varphi$

$$= \int (1-\cos\varphi^2)^{\frac{m-1}{2}} \cos\varphi^n d\cos\varphi,$$

sondern auch 2) als $= - \int \sin\varphi^m \cos\varphi^{n-1} d\sin\varphi$

$$= - \int \sin\varphi^m (1-\sin\varphi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\sin\varphi$$

eine durchaus integrirbare Reihe darstellen; und die erste würde sich endlich gegliedert ergeben, wenn m (die zweite, wenn n) eine bejahte ganze ungerade Zahl wäre.

§. 3. Auf ähnliche Weise würden auch die übrigen nachher folgenden Integranden vermittelst des Binomialtheoremes, oder auch durch andere Reihenentwickelung, integrirbar gemacht werden können. Im allgemeinen aber ist es rathsamer, mit den neueren Analysten die Methode des partiellen Integrirens zu befolgen, wodurch man in den Fällen, da das Integral in endlicher Gliederzahl erreichbar ist, sehr bequem auf ein rückständiges einfacheres Integrand gebracht wird, welches man genau anzugeben weifs. Diese einfacheren Integranden will ich, zum Besten der Anfänger, in den 10 ersten Formeln voranschicken.

§. 4.

Es ist 1) $\int \sin\varphi\, d\varphi = \cos\varphi$

2) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi^2} = \int \frac{-d\cos\varphi}{1-\cos\varphi^2} = -1 \int \frac{d\cos\varphi}{1-\cos\varphi^2}$

also $= -\frac{1}{2} \log \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$. (X. §. 9.)

3) $\int \cos\varphi\, d\varphi = - \sin\varphi$

4) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^2} = \int \frac{d \sin\varphi}{1 - \sin\varphi^2}$,

also $= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}$. (X. §. 9.)

5) $\int \sin\varphi^m \cos\varphi\, d\varphi = \int \sin\varphi^m\, d \sin\varphi$

also $= \frac{\sin\varphi^{m+1}}{m+1}$ (I. §. 12 und §. 20.)

6) $\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi^m} = \int \sin\varphi^{-m}\, d\sin\varphi$

also $= \frac{\sin\varphi^{-m+1}}{-m+1} = - \frac{1}{(m-1)\sin\varphi^{m-1}}$.

(I. §. 12.)

7) $\int \cos\varphi^n \sin\varphi\, d\varphi = - 1 \,.\, \int \cos\varphi^n\, d \cos\varphi$

also $= - \frac{\cos\varphi^{n+1}}{n+1}$. (I. §. 12.)

8) $\int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^n} = - \int \cos\varphi^{-n}\, d \cos\varphi$

also $= - \frac{\cos\varphi^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(n-1)\cos\varphi^{n-1}}$

$= \frac{\text{tang}\,\varphi^{n-1}}{n-1}$. (I. §. 12.)

9ª) $\int \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \int \cos\varphi\, d \cos\varphi$

also $= \frac{\cos\varphi^2}{2} + C$ (I. §. 12.)

9ᵇ) $\int \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = - \int \sin\varphi\, d \sin\varphi$

also $= - \frac{\sin\varphi^2}{2} + K$ (I. §. 12.)

Beide Integrale sind richtig, und man kann auch durch zwei verschiedene Constanten C und K erhalten, dafs sie für alle φ einerlei Gröfse geben. Denn um $\frac{\cos\varphi^2}{2} + C = - \frac{\sin\varphi^2}{2} + K$ zu erhalten, ist ja nur nöthig $K - C = \frac{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2}{2} = \frac{1}{2}$ zu haben.

Es muss 10) $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}=\log\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\log\tang\varphi$ seyn. Denn da $\sin\varphi^2+\cos\varphi^2=1$ ist: so hat man $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$

$$=\int\frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}+\int\frac{\cos\varphi^2\,d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}=\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi}+\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin\varphi}$$

$$=-\int\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi}+\int\frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi}\overset{\text{IX. §. 4}}{=\!=\!=}-\log\cos\varphi+\log\sin\varphi$$

$$=\log\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

§. 5. *Zwei Hauptsätze.*

Erstens: $\int\sin\varphi^m\cos\varphi^n\,d\varphi$ ist

$$11,\ 1)=\frac{1}{m+1}\sin\varphi^{m+1}\cos\varphi^{n-1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin\varphi^{m+2}\cos\varphi^{n-2}\,d\varphi$$

$$2)=\quad ,\quad+\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{1}{m+3}\cdot\sin\varphi^{m+3}\cos\varphi^{n-3}$$

$$+\frac{.n-1.n-3.}{.m+1.m+3.}\int\sin\varphi^{m+4}\cos\varphi^{n-4}\,d\varphi$$

$$3)=\quad ,\quad+\quad ,\quad+\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdot\frac{1}{m+5}\sin\varphi^{m+5}\cos\varphi^{n-5}$$

$$+\frac{.n-1.n-3.n-5.}{.m+1.m+3.m+5.}\int\sin\varphi^{m+6}\cos\varphi^{n-6}\,d\varphi$$

und so weiter.

Zweitens: $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ ist auch

$$12,\ 1) = -\frac{1}{n+1}\cos\varphi^{n+1}\sin\varphi^{m-1} + \frac{m-1}{n+1}\int\cos\varphi^{n+2}\sin\varphi^{m-2}d\varphi$$

$$2) = - \ , \qquad -\frac{m-1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+3}\cos\varphi^{n+3}\sin\varphi^{m-3}$$

$$+\frac{.m-1.m-3.}{.n+1.n+3.}\int\cos\varphi^{n+4}\sin\varphi^{m-4}d\varphi$$

$$3) = - \ , \qquad - \ , \qquad -\frac{.m-1.m-3.\ 1.}{.n+1.n+3.n+5.}\cos\varphi^{n+5}\sin\varphi^{m-6}$$

$$+\frac{.m-1.m-3.m-5.}{.n+1.n+3.n+5.}\int\cos\varphi^{n+6}\sin\varphi^{m-6}d\varphi$$

§. 6. *Beweis für* 11, 1).

$$\int\sin\varphi^m\cos\varphi^n d\varphi = \int\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi^m\cos\varphi\, d\varphi$$

also $= \int\cos\varphi^{n-1}.\sin\varphi^m\, d\sin\varphi$ geschrieben,

$$\text{ist ein} = \int P\ .\ dQ \overset{\text{VI. §. 4.}}{=\!=\!=} PQ - \int Q\,dP$$

$$\text{also} = \cos\varphi^{n-1}.\frac{\sin\varphi^{m+1}}{m+1} - \int\frac{\sin\varphi^{m+1}}{m+1}.n-1.\cos\varphi^{n-2}d\cos\varphi$$

$$= \frac{1}{m+1}\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi^{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int\sin\varphi^{m+2}\cos\varphi^{n-2}d\varphi$$

Beweis für 12, 1).

$$\int\sin\varphi^m\cos\varphi^n d\varphi = \int\sin\varphi^{m-1}.\cos\varphi^n\sin\varphi\, d\varphi$$

also $= \int -\sin\varphi^{m-1}.\cos\varphi^n\, d\cos\varphi$ geschrieben,

$$\text{ist ein} = \int P\ .\ dQ \overset{\text{VI. §. 4.}}{=\!=\!=} PQ - \int Q\,dP$$

$$\text{also} = -\sin\varphi^{m-1}\frac{\cos\varphi^{n+1}}{n+1} - \int\frac{\cos\varphi^{n+1}}{n+1}.m-1.\sin\varphi^{m-2}d\sin\varphi$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sin\varphi^{m-1}\cos\varphi^{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int\cos\varphi^{n+2}\sin\varphi^{m-2}d\varphi.$$

Mit der ersten Gleichung in 11) und 12) sind auch die 2ten, 3ten, u. s. w. erwiesen, weil sie

dadurch gefolgert wurden, dafs wir, auf das jedesmal rückständig gebliebene Integrand, die erste Gleichung selbst wiederum angewandt haben.

§. 7. Ist sie rmal angewandt, so wird in 11, r) das rückständige Integrand ein $\int \sin\varphi^{m+2r} \cos\varphi^{n-2r} d\varphi$, in 12, r) dagegen das rückständige Integrand ein $\int \cos\varphi^{n+2r} \sin\varphi^{m-2r} d\varphi$ seyn. Wenn daher $n = 2r+1$, nämlich n irgend eine ganze bejahte ungerade Zahl ist: so wird man durch rmalige Anwendung der 11, 1) auf das rückständige Integrand $\int \sin\varphi^{m+2r} \cos\varphi\, d\varphi$ kommen, welches nach 5) sich $= \frac{\sin\varphi^{m+2r+1}}{m+2r+1}$ ergeben mufs.

Oder wenn $m = 2r+1$ ist: so kann man sich durch 12, r) auf das rückständige Integrand $\int \cos\varphi^{n+2r} \sin\varphi\, d\varphi$ bringen, welches nach 7) sich $= -\frac{\cos\varphi^{n+2r+1}}{n+2r+1}$ ergeben mufs.

Doch würden wir gerade für diese beiden Fälle, das genaue Integral noch einfacher, nach den folgenden beiden Lehrsätzen finden können; und überhaupt wird es das beste seyn, die Fälle, in welchen wir das vielumfassende $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ genau zu integriren wissen, erst späterhin darzustellen, nachdem wir noch mehre dahin gehörige Formeln werden aufgeführt haben, wobei ich sehr darauf achten werde, die Anfänger mit den gewöhnlichen Formeln bekannt zu machen.

§. 8. Die beiden, vielleicht ganz neuen Hauptsätze aber habe ich vorausschicken wollen, weil sie nicht nur in einigen Fällen sehr bequem zum Ziele führen, sondern auch die beiden folgenden, sehr gewöhnlichen Lehrsätze ungemein leicht aus ihnen abzuleiten sind, und gerade durch diese Ableitung der-

selben wir von ihrer völligen Allgemeinheit auf das deutlichste überzeugt werden. Denn in den obigen sehr einfachen Beweisen §. 6. liegt es vor Augen, daſs jedes in denselben gebrauchte Integral $\int dQ$ der algebraischen Integrirungsregel $\int X^p dX = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ gemäſs, und jedes in denselben gebrauchte Differential dP der algebraischen Differenziirungsregel $d.X^p = pX^{p-1}dX$ gemäſs zu finden war. Da nun diese beiden Regeln für bejahte und verneinte, sowohl ganze als gebrochene, folglich auch irationale und algebraisch unmögliche Exponenten p gültig sind: so ist es uns einleuchtend, daſs in den beiden Hauptsätzen auch die Exponenten, m und n, derselben Allgemeinheit mächtig, und in den beiden nun folgenden Lehrsätzen ebenfalls derselben mächtig bleiben müssen.

§. 9. *Lehrsatz* I und II.

Iter Lehrsatz: $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ ist

$$13)\quad = -\frac{1}{m+n}\cos\varphi^{n+1}\sin\varphi^{m-1} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos\varphi^n \sin\varphi^{m-2} d\varphi$$

IIter Lehrsatz: $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ ist auch

$$14)\quad = \frac{1}{m+n}\sin\varphi^{m+1}\cos\varphi^{n-1} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin\varphi^m \cos\varphi^{n-2} d\varphi$$

§. 10. *Beweis* für I.

Im Iten Hauptsatze $m-2$ statt m, und $n+2$ statt n geschrieben, gibt uns die Gleichung

$$(m-1)\int \sin\varphi^{m-2}\cos\varphi^{n+2} d\varphi = \sin\varphi^{m-1}\cos\varphi^{n+1} + (n+1)\int \sin\varphi^m \cos\varphi^n.$$

In ihrer linken Seite $\cos\varphi^2 = 1 - \sin\varphi^2$ geschrieben, gibt uns die Gleichung

$(m-1)\int \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^n\, d\varphi - (m-1) \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n\, d\varphi$
$= \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^{n+1} + (n+1) \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n\, d\varphi$, also auch
$-(m+n) \sin\varphi^m \cos\varphi^n\, d\varphi$
$= \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^{n+1} - (m-1) \int \sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^n\, d\varphi$
welche, durch $-(m+n)$ dividirt, den Lehrsatz I. gibt.

Beweis für II.

Im IIten Hauptsatze $n-2$ statt n, und $m+2$ statt m geschrieben, gibt uns die Gleichung
$(n-1) \int \sin\varphi^{m+2} \cos\varphi^{n-2}\, d\varphi$
$= -\cos\varphi^{n-1} \sin\varphi^{m+1} + (m+1) \int \cos\varphi^n \sin\varphi^m\, d\varphi$

In ihrer linken Seite $\sin\varphi^2 = 1 - \cos\varphi^2$ geschrieben, hat man
$(n-1) \int \cos\varphi^{n-2} \sin\varphi^m\, d\varphi - (n-1) \int \cos\varphi^n \sin\varphi^m\, d\varphi$
$= -\cos\varphi^{n-1} \sin\varphi^{m+1} + (m+1) \int \cos\varphi^n \sin\varphi^m\, d\varphi$,
also auch die Gleichung
$(n+m) \int \cos\varphi^n \sin\varphi^m\, d\varphi$
$= \cos\varphi^{n-1} \sin\varphi^{m+1} + (n-1) \int \cos\varphi^{n-2} \sin\varphi^m\, d\varphi$
welche, durch $+(n+m)$ dividirt, den Lehrsatz II. gibt.

§. 11. *Zusätze.*

Da jeder von den beiden Exponenten m und n, nach §. 8, sowohl bejaht als verneint, folglich nach dem Gesetze der Stetigkeit auch $= 0$ kann gefordert werden: so haben wir, in der Formel 13) den Exponenten $n = 0$ gesetzt,

15) $\int \sin\varphi^m \, d\varphi = -\frac{1}{m}\cos\varphi \sin\varphi^{m-1} + \frac{m-1}{m}\int 1.\sin\varphi^{m-2}\, d\varphi$;

also $\int \sin\varphi^1 \, d\varphi = -\cos\varphi$

$$\int \sin\varphi^2 \, d\varphi = -\frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\int \sin\varphi^0 \, d\varphi$$

$$= \quad , \quad + \frac{1}{2}\varphi$$

$$\int \sin\varphi^3 \, d\varphi = -\frac{1}{3}\cos\varphi\sin\varphi^2 + \frac{2}{3}\int \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \quad , \quad -\frac{2}{3}\cos\varphi$$

$$\int \sin\varphi^4 \, d\varphi = -\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi^3 + \frac{3}{4}\int \sin\varphi^2 \, d\varphi$$

$$= \quad , \quad -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\varphi.$$

Woraus nun vor Augen liegt, daſs man für jedes bejahte ganze m genau zu integriren weiſs; auch für jedes ungerade m das Integral durchaus algebraisch ausgedrückt werden könnte: weil ja das gegebne $\sin\varphi = x$ gesetzt, allemal $\cos\varphi = \sqrt{(1-xx)}$ seyn muſs.

Für ein gerades m aber muſs das letzte Glied des Integrales, mit dem Bogen φ, allerdings transscendent bleiben.

In der Formel 14) den Exponenten $m = 0$ gesetzt, gibt uns

16) $\int \cos\varphi^n d\varphi = \frac{1}{n} \sin\varphi \cos\varphi^{n-1} + \frac{n-1}{n} \int 1 . \cos\varphi^{n-2} d\varphi$

also $\int \cos\varphi^1 d\varphi = 1 . \sin\varphi$

$$\int \cos\varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi$$

$$\int \cos\varphi^3 d\varphi = \frac{1}{3} \sin\varphi \cos\varphi^2 + \frac{1}{3} \int \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \quad , \quad + \frac{1}{3} . \sin\varphi$$

$$\int \cos\varphi^4 d\varphi = \frac{1}{4} \sin\varphi \cos\varphi^3 + \frac{3}{4} . \int \cos\varphi^2 d\varphi$$

$$= \quad , \quad + \frac{3}{4} . \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{3}{4} . \frac{1}{2} \varphi;$$

woraus nun schon erhellet, dafs wir auch für jedes ganze bejahte n genau zu integriren wissen, und das Integral wiederum abwechselnd algebraisch und transcendent in seinem letzten Gliede sich ergeben mufs.

§. 12. Nach diesen Formeln 13) 14) 15) und 16) werden wir nun über die genaue Integrabilität eines $y = \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$, und zwar zuvörderst unter dem Beding, dafs m und n b e j a h t e Exponenten seyen, folgendes zu bestimmen wissen.

1) Wenn m eine u n g e r a d e ganze Zahl, ein $= 2r + 1$ ist: so kann y durch rmal wiederholte Anwendung der Formel 13) auf das rückständige Integrand $\int \cos\varphi^n \sin\varphi\, d\varphi$ gebracht werden; welches nach Formel 7) sich $= - \frac{\cos\varphi^{n+1}}{n+1}$ ergibt, der Exponent n mag seyn was er will.

2) Wenn n eine u n g e r a d e ganze Zahl ist: so wird man durch die Formel 14) auf das rückständige $\int \sin\varphi^m \cos\varphi\, d\varphi$ kommen können; welches nach

Formel 6) sich $= \frac{\sin\varphi^{m+1}}{m+1}$ ergeben mufs, bei jedem m.

3) Wenn m eine gerade ganze Zahl, ein $= 2r$ ist: so kann y durch Formel 13) auf das rückständige $\int \cos\varphi^n d\varphi$ gebracht werden, welches nach Formel 16) genau integrabel sich ergiebt, falls auch n irgend eine ganze Zahl ist, sie mag gerade oder ungerade seyn.

4) Wenn n eine gerade ganze Zahl ist: so kann y durch die Formel 14) auf $\int \sin\varphi^m d\varphi$ gebracht werden, welches nach Formel 15) genau integrabel sich ergiebt, falls auch m irgend eine ganze, gerade oder ungerade Zahl ist.

Dafs wir also vermittelst dieser 4 Formeln jedes $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ genau zu integriren wissen, wenn entweder von den beiden Exponenten irgend einer eine ungerade ganze Zahl ist, der andere Exponent mag seyn was er will, oder, wenn beide Exponenten ganze Zahlen sind. Und alle diese Integrale werden hiemit, vermittelst der beiden Lehrsätze einfacher gefunden, als wenn wir uns der beiden Hauptsätze unmittelbar bedienen wollten, so lange nur von bejahten Exponenten m und n die Rede ist.

§. 13. Auch für verneinte Werthe dieser Exponenten, also für $\int \sin\varphi^{-m} \cos\varphi^n d\varphi$, für $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^{-n} d\varphi$, und für $\int \sin\varphi^{-m} \cos\varphi^{-n} d\varphi$, müssen, nach §. 8, alle bisher gefundene Formeln ebenfalls richtig bleiben. Da sie aber als unendliche Reihen, nur bei eintretender Convergenz sich brauchbar ergeben würden: so wird auch hier die Frage entstehen, in welchen Fällen sie durch eine endliche Gliederzahl genau können ausgedrückt werden.

§. 14. Im Iten Lehrsatze $m+2$ statt m geschrieben, giebt uns die Gleichung

$$(m+2+n) \int \sin\varphi^{m+2} \cos\varphi^n \, d\varphi = -\cos\varphi^{n+1} \sin\varphi^{m+2} + (m+1) \int \cos\varphi^n \sin\varphi^m \, d\varphi$$

also $$-(m+1) \int \cos\varphi^n \sin\varphi^m \, d\varphi = -\cos\varphi^{n+1} \sin\varphi^{m+2} - (m+2+n) \int \sin\varphi^{m+2} \cos\varphi^n \, d\varphi$$

Hierin $-m$ statt m gefordert, giebt uns

$$(m-1) \int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^m} d\varphi = -\frac{\cos\varphi^{n+1}}{\sin\varphi^{m-1}} + (m-n-2) \int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^{m-2}} d\varphi$$

$$17) \int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^m} d\varphi = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos\varphi^{n+1}}{\sin\varphi^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos\varphi^n \, d\varphi}{\sin\varphi^{m-2}}.$$

Für den einzelnen Werthfall $n = 0$, also auch

$$17^*) \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^m} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^{m-2}}$$

§. 15. Im IIten Lehrsatze $n+2$ statt n gefordert, gibt

$$(m+n+2) \int \sin\varphi^m \cos\varphi^{n+2} d\varphi = \sin\varphi^{m+1} \cos\varphi^{n+1} + (n+1) \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$$

$$-(n+1) \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi = \sin\varphi^{m+1} \cos\varphi^{n+1} - (m+n+2) \int \sin\varphi^m \cos\varphi^{n+2} d\varphi$$

Hierin $-n$ statt n gefordert, gibt

$$18) \int \frac{\sin\varphi^m}{\cos\varphi^n} d\varphi = \frac{1}{n-1} \frac{\sin\varphi^{m+1}}{\cos\varphi^{n-1}} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\sin\varphi^m \, d\varphi}{\cos\varphi^{n-2}}.$$

Für den einzelen Werthfall $m = 0$ also auch

$$18^*) \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^n} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^{n-2}}$$

§. 16. Wenn daher im vorgegebnen $\int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^m} d\varphi$ der Exponent m eine bejahte ganze Zahl, also entweder eine gerade $= 2r$, oder eine ungerade $= 2r+1$ ist: so wird man nach $r$maliger Anwendung der

Formel 17) entweder auf $\int \cos\varphi^n \, d\varphi$, oder auf $\int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi} d\varphi$ kommen.

Und wenn im vorgegebnen $\int \frac{\sin\varphi^m}{\cos\varphi^n} d\varphi$ der Exponent n entweder $= 2r$, oder $= 2r+1$ ist: so wird man nach r maliger Anwendung der Formel 18) entweder auf $\sin\varphi^m \, d\varphi$, oder auf $\int \frac{\sin\varphi^m}{\cos\varphi} d\varphi$ kommen.

Von dem rückständigen $\int \cos\varphi^n \, d\varphi$ wissen wir nach 16), daſs es genau integrirt werden kann, wenn n irgend eine bejahte ganze Zahl ist.

Von dem rückständigen $\int \sin\varphi^m \, d\varphi$ wissen wir es nach 15), wenn m irgend eine ganze Zahl ist.

Das rückständige $\int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi} d\varphi$ aber, als $\int \cos\varphi^n \sin\varphi^{-1} d\varphi$ muſs nach Formel 14) uns

$$19)\ \int \cos\varphi^n \sin\varphi^{-1} d\varphi = \frac{1}{n-1} \cos\varphi^{n-1} + \int \frac{\cos\varphi^{n-2}}{\sin\varphi} d\varphi$$

geben, welches durch r mal wiederholte Anwendung, wenn entweder $n = 2r$, oder $n = 2r+1$ ist, im ersten Falle auf das rückständige $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$, nach 2) integrirbar, im zweiten Falle auf das rückständige $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sin\varphi}$ (durch 10) integrirt) bringen muſs.

Das rückständige $\int \frac{\sin\varphi^m}{\cos\varphi} d\varphi$ endlich, als $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^{-1} d\varphi$, muſs nach Formel 13) uns

$$20)\ \int \sin\varphi^m \cos\varphi^{-1} d\varphi = -\frac{1}{m-1} \sin\varphi^{m-1} + \int \frac{\sin\varphi^{m-2}}{\cos\varphi} d\varphi$$

geben, welches durch r mal wiederholte Anwendung, wenn entweder $m = 2r$ oder $m = 2r+1$

ist, im ersten Falle auf das rückständige $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ nach 4) integrirbar, im zweiten Falle wiederum auf das rückständige $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sin\varphi}$ bringen muſs.

§. 17. In der Formel 17) $-n$ statt n geschrieben, gibt

$$21)\ \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^m \cos\varphi^n}$$
$$= -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^{m-2} \cos\varphi^n}$$

In der Formel 18) $-m$ statt m geschrieben, gibt

$$22)\ \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^m \cos\varphi^n}$$
$$= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^{n-2} \sin\varphi^m};$$

woraus, wie in §. 16, erhellet, daſs auch $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^m \cos\varphi^n}$, genau integrirbar seyn muſs, wenn sowol m als n irgend eine bejahte ganze Zahl ist.

§. 18. Hiemit wissen wir nun allerdings, wie sowohl $\int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^m} \cdot d\varphi$, als $\int \frac{\sin\varphi^m}{\cos\varphi^n} d\varphi$, und auch $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^m \cos\varphi^n}$ genau integrirt zu finden seyen, wenn m sowohl als n irgend eine bejahte ganze Zahl ist. Da wir aber im obigen §. 12. gefunden haben, daſs $\int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ auch genau integrirbar seyn muſs, wenn irgend einer von den beiden Exponenten m und n eine ungerade ganze Zahl ist, der andere mag seyn, was er will: so kann die Frage entstehen, ob nicht eben dergleichen auch für $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^m \cos\varphi^n}$ Statt finden möchte; und diese Frage wird sich nun

durch die beiden neuen Hauptsätze §. 8. kürzer, als durch die gewöhnlichen Lehrsätze §. 9. beantworten lassen.

§. 19. Im Iten Hauptsatze werde $-m$ statt m geschrieben, so hat man

23) $\int \sin\varphi^{-m} \cos\varphi^{n}\, d\varphi$

$$= \frac{1}{1-m}\,\frac{\cos\varphi^{n-1}}{\sin\varphi^{m-1}} + \frac{n-1}{1-m}\int \sin\varphi^{-m+2}\cos\varphi^{n-2}\, d\varphi$$

Im IIten Hauptsatze $-n$ statt n geschrieben, gibt

24) $\int \sin\varphi^{m} \cos\varphi^{-n}\, d\varphi$

$$= -\frac{1}{1-n}\,\frac{\sin\varphi^{m-1}}{\cos\varphi^{n-1}} + \frac{m-1}{1-n}\int \cos\varphi^{-n+2}\sin\varphi^{m-2}\, d\varphi$$

Ist nun $-m = -2r-1$, so wird man nach $(r+1)$maliger Anwendung der ersten Formel, das rückständige Integrand $\int \sin\varphi^{-m+2(r+1)} \cos\varphi^{n-2(r+1)}\, d\varphi$ erhalten, welches als $= \int \sin\varphi \cos\varphi^{n-2(r+1)}\, d\varphi$, nach Formel 7) für jedes n allerdings genau integrirt werden kann. Da aber der Coëfficient dieses rückständigen Integranden unter seinen Factoren, allemal ein $\frac{1}{0}$ enthalten wird: so ist der Ausdruck nicht bestimmt genug, um angewandt zu werden.

Da eben diese Unbestimmtheit, auf dieselbe Weise sich ergeben müfste, wenn $-n = -2r-1$, nämlich dieser Exponent eine verneinte ungerade Zahl wäre: so wissen wir nunmehr, dafs durch einen einzigen ungeraden Exponenten die genaue Integrabilität nur gesichert ist, wenn dieser Exponent eine ganze b e j a h t e Zahl ist.

§. 20. In dem bekannten $d\sin\varphi = \cos\varphi\, d\varphi$ werde $\varphi = n\psi$ mit constantem n gesetzt: so mufs

$d\sin n\psi = \cos n\psi . d n\psi = n\cos n\psi\, d\psi$ seyn;

folglich, wenn $dy = \cos n\psi\, d\psi$ ist, $y = \frac{1}{n} \sin n\psi$ seyn.

Eben so kann gefolgert werden, dafs

aus $dy = \sin n\psi\, d\psi$, auf $y = -\frac{1}{n} \cos n\psi$;

auch aus $dy = \frac{d\psi}{(\cos n\psi)^2}$, auf $y = \frac{1}{n} \operatorname{tang} n\psi$,

und eben so auch aus den übrigen fünf trigonometrischen Differentialen, Diff. R. IX. §. 11, auf dergleichen Integrale zu schliefsen ist. (Indessen wird es für uns hinreichend seyn, uns fernerhin, wie schon bisher in diesem Capitel es geschehen ist, durch die Sinus und Cosinus auszudrücken, und nächstdem am liebsten die Tangenten zu Hülfe zu nehmen, weil ja diese drei Linien in Hinsicht ihres $+$ und $-$ am einfachsten bestimmt sind.)

§. 21. Demnach kann z. B.

aus $dy = (A + B \sin\psi + C \sin 2\psi + D \sin 3\psi \ldots) d\psi$

auf $y = A\psi + B\cos\psi + \frac{C}{2}\cos 2\psi + \frac{D}{3}\cos 3\psi \ldots + \text{Const}$;

aus $dy = (A + B\cos\psi + C\cos 2\psi + D\cos 3\psi \ldots) d\psi$

auf $y = A\psi - B\sin\psi - \frac{C}{2}\sin 2\psi - \frac{D}{3}\sin 3\psi \ldots + \text{Const}$

geschlossen werden.

§. 22. Wenn hiemit die bekannten, in Diff. R. aber nur sehr kurz von uns berührten Gleichungen zwischen dortigen mehrfach dimensionirten Sinus oder Cosinus verbunden werden: so können dadurch mancherlei merkwürdige, auch für die Integralrechnung brauchbare Relationen allerdings sich erweisen lassen. Indessen werden wir derselben bei unsern Erörterungen der angewandten Mathematik nicht nö-

thig haben. In vieler Hinsicht aber wird es, namentlich auch für Anfänger nützlich seyn, das bisher nur trigonometrisch behandelte

$y = \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n\, d\varphi$ auch mit dem algebraischen, sehr sorgfältig von uns behandelten

$\mathfrak{y} = \int (a + bx^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}}\, x^{\mathfrak{m}}\, dx$ in Vergleichung zu bringen, wodurch wir auch noch eine neue genaue Integrabilität des y entdecken werden. Durch teutsche Buchstaben werde ich hiebei die Dignitäten in dem algebraischen $\mathfrak{y}$ schreiben, um die in den trigonometrischen y bisher gebrauchten lateinischen m und n fernerhin beibehalten zu können.

§. 23. Wenn wir nämlich in dem

$y = \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n\, d\varphi$ das Bogen-Differential

$d\varphi = \frac{d \sin\varphi}{\cos\varphi}$ ansetzen: so haben wir

$y = \int \operatorname{cosin}\varphi^{n-1} \sin\varphi^m\, d \sin\varphi$. Hierin

$\sin\varphi = x$, also $\cos\varphi = \sqrt{(1 - xx)}$ geschrieben, gibt

uns $y = \int (1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}\, x^m\, dx$; welches nun der in Cap. V. von uns umständlich behandelten Form

$\mathfrak{y} = \int (a + bx^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}}\, x^{\mathfrak{m}}\, dx$ unterworfen ist.

§. 25. Da nun jene Form $\mathfrak{y}$, nach Cap. V. §. 22, genau integrabel befunden wurde,

I) wenn $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} - 1$ gegeben war: so muss auch y integrabel seyn, wenn ihr $m = 2 - 1 = 1$ ist; welches wir durch Formel 7) schon wissen.

Beide Formen $\mathfrak{y}$ und y müssen ferner integrabel seyn,

II) wenn $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}\mathfrak{p} = -\mathfrak{n} - 1$ im $\mathfrak{y}$.

also wenn $m + 2 . \frac{n-1}{2} = -2 - 1$ im y,

also wenn $m + n = -2$ ist. (Eine neue Integrabilität, weil ja m und n hier auch bejahte und verneinte Brüche seyn können.)

III) wenn im $\mathfrak{y}$ der Exponent $\mathfrak{p} = r$,

also im y der Exponent $\frac{n-1}{2} = r$, folglich $n = 2r - 1$, das heifst, n irgend eine bejahte ganze ungerade Zahl ist (schon bekannt nach §. 12);

IV) wenn im $\mathfrak{y}$ uns $\frac{m+1}{n} = r$,

also im y uns $\frac{m+1}{2} = r$, also $m = 2r - 1$, das heifst m als irgend eine ganze bejahte ungerade Zahl (oder bei $r = 0$ auch $= -1$) gegeben ist (schon bekannt nach §. 12);

V) wenn im $\mathfrak{y}$ uns $\frac{m+1}{n} + \mathfrak{p} = -r$,

im y also $\frac{m+1}{2} + \frac{n-1}{2} = -r$, also $m + n = -2r$ gegeben ist. (Eine neue Integrabilität, weil m und n auch Brüche seyn können.)

§. 26. Da die durch II) aufgefundene Bedingung, dafs $m + n = -2$ seyn mufs, nur einen einzelen Fall von der durch V) gefundenen Bedingung $m + n = -2r$ ausmacht: so besteht alles, was wir im vorigen §en Neues gefunden haben, darin

dafs $y = \int \cos\varphi^n \sin\varphi^m d\varphi$

als $y = \int (1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} x^m dx$,

mit $\mathfrak{y} = \int (a + bx^n)^{\mathfrak{p}} x^m dx$ verglichen, nach Cap. V. §. 21, V) genau integrabel seyn mufs, wenn $n + m = -2r$ gegeben ist, die m und n mögen übrigens seyn, was sie wollen,

§. 27. Der Satz ist meines Wissens neu, und aus vielen, zum Theil ziemlich verwickelten Formeln gefolgert; daher es wohl gerathen ist, durch ein Beispiel zu prüfen, ob er sich zutreffend beweise.

Sey $n = \frac{1}{2}$ und $m = -\frac{5}{2}$ gegeben, so ist

$n + m = -\frac{4}{2} = -2.1 = -2.r$ für $r = 1$.

Da nun nach Cap. V. §. 21, V)

$$y = \int (a + bx^n)^p x^m dx$$
$$= \frac{1}{n a . a^H} \cdot \frac{n}{m+n} \left(\frac{x^n}{a + bx^n}\right)^{\frac{m+n}{n}} + 0$$
$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{m+n} \left(\frac{x^n}{a + bx^n}\right)^{\frac{m+n}{n}}$$ seyn muſs,

wenn $H = -\frac{m+1}{n} - p - 1 = 0$ gegeben ist, wie es im vorgegebnen $y = \int (1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} x^m dx$ für $n = \frac{1}{2}$ und $m = -\frac{5}{2}$, bei $n = 2$ also $p = \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$ allerdings der Fall ist: so behaupten wir,

daſs $\int \cos\varphi^{\frac{1}{2}} \sin\varphi^{-\frac{5}{2}} d\varphi$, auch $= \int \cos\varphi^{-\frac{1}{2}} \sin\varphi^{-\frac{5}{2}} d \sin\varphi$

als $\int (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{5}{2}} dx$, sich $= -\frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{1 - x^2}\right)^{-\frac{3}{4}}$

also auch $= -\frac{2}{3} \left(\frac{1 - x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{4}}$ sich

ergeben muſs; welches nun auch durch algebraische Differenziirung als vollkommen richtig sich bestätigt.

§. 28. Das hiemit gefundene Integral trigonometrisch ausgedrückt, behaupten wir

daſs $\int \cos\varphi^{\frac{1}{2}} \sin\varphi^{-\frac{5}{2}} d\varphi = -\frac{2}{3} \left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}$ seyn muſs;

welches ebenfalls durch trigonometrische Differenziirung völlig bestätigt wird.

§. 29. In dem §. 23. vorgegebnen

$y = \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$, das Bogendifferential

$d\varphi = \frac{d\cos\varphi}{-\sin\varphi}$ angesetzt, und nun

$-y = \int \sin\varphi^{m-1} \cos\varphi^n d\cos\varphi$

mit $-\mathfrak{y} = \int (a+bx^n)^p x^m dx$ verglichen, würde uns vermittelst der 5 Bedingungen, unter welchen $-\mathfrak{y}$ integrabel seyn muss, für $-y$ nichts anders angeben, als was wir seit §. 23. schon gefunden haben, dass es nämlich genau integrabel seyn muss, wenn 1) entweder m oder n eine bejahte ganze ungerade Zahl, oder wenn 2) $m+n = -2r$ gegeben ist.

§. 30. Diese 2te Relation ist so eben durch Vergleichung zwischen

$y = \int \sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ und dem früher behandelten

$\mathfrak{y} = \int (a+bx^n)^p x^m dx$ entdeckt, die Ite Relation aber, auch durch die eigene Betrachtung des $\mathfrak{y}$ in §. 9 u. s. w. schon gefunden worden. Durch diese obige Betrachtung des y aber haben wir auch noch andere integrable Fälle desselben gefunden, welche durch die Vergleichung mit $\mathfrak{y}$ und dessen fünf integrable Fälle sich nicht ergeben wollen; da wir doch oben in Cap. V. geäussert haben, dass durch diese fünf Fälle die sämtlichen Integrabilitäten des $\mathfrak{y}$ erschöpft seyen! Ich erwiedere, dass dabei nur von solchen Fällen des $\mathfrak{y}$ die Rede war, welche durch die Relationen zwischen den drei Exponenten, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$, allein schon integrabel gewährt wurden, unabhängig von den Coefficienten a und b, welche dabei sollten seyn können, was sie wollen; da hingegen z. B. die Behauptung, dass m und n als ganze Zahlen gegeben, jedes $\sin\varphi^m \cos\varphi^n d\varphi$ genau integrabel gewähren, auch auf das allgemeinere Integrand $\int (a+bx^n)^p x^m dx$ unter dem Beding eines auf

$= 1 - 1 . x^2$ eingeschränkten $a + bx^n$ würde eingreifen können.

§. 31. *Lesrsatz* III und IV, *samt Beweis.*

Lehrs. III. $\int \varphi^l d\varphi \sin \varphi$

$= \int \varphi^l . \sin \varphi \, d\varphi$ geschrieben, ist

ein $= \int P . dQ \overset{\text{VI. §. 4.}}{=\!=\!=} PQ - \int Q dP$, also

25) $= - \varphi^l \cos \varphi + l \int \cos \varphi . \varphi^{l-1} d\varphi$.

Lehrs. IV. $\int \varphi^l d\varphi \cos \varphi$

$= \int \varphi^l . \cos \varphi \, d\varphi$ geschrieben, ist

ein $= \int P . dQ \overset{\text{VI. §. 4.}}{=\!=\!=} PQ - \int Q dP$, also

26) $= \varphi^l \sin \varphi - l \int \sin \varphi . \varphi^{l-1} d\varphi$.

§. 32. Nach r mal wiederholter Anwendung der Formel 25) hat man also das rückständige Integrand $\int \cos \varphi . \varphi^{l-r} d\varphi$, also $= \int \cos \varphi \, d\varphi = \sin \varphi$, wenn l eine bejahte ganze Zahl r ist; und nach r maliger Wiederholung der Formel 26) hat man das rückstandige Integrand

$\int \sin \varphi . \varphi^{l-r} d\varphi = \int \sin d\varphi = - \cos \varphi$, wenn $l = r$ ist.

§. 33. Die gewöhnlichen Formeln sind

27) $\int \varphi^l d\varphi \sin \varphi = - \varphi^l \cos \varphi + l \varphi^{l-1} \sin \varphi$
$\qquad - l . l-1 . \int \varphi^{l-2} d\varphi \sin \varphi$

28) $\int \varphi^l d\varphi \cos \varphi = \varphi^l \sin \varphi + l \varphi^{l-1} \cos \varphi$
$\qquad - l . l-1 . \int \varphi^{l-2} d\varphi \cos \varphi$.

27) ergibt sich aus Lehrs. III, wenn wir dessen

$\int \varphi^{l-1} \cos \varphi \, d\varphi = \varphi^{l-1} \sin \varphi - (l-1) \int \varphi^{l-2} \sin \varphi \, d\varphi$

nach Lehrsatz IV ansetzen.

28) ergibt sich aus Lehrs. IV, wenn wir dessen
$\int \varphi^{l-1} \sin\varphi \, d\varphi = -\varphi^{l-1} \cos\varphi + (l-1) \int \varphi^{l-2} \cos\varphi \, d\varphi$
nach Lehrsatz III. ansetzen.

§. 34. Nach diesen gewöhnlichen Formeln werden wir allerdings, wenn $l = 2r$, also eine ganze gerade Zahl ist, schon nach r maliger Anwendung zum Ziele gekommen seyn. Wenn aber $l = 2r + 1$ ist, so werden wir nach r maliger Anwendung der Formel 27) das Integrand $\int \varphi \, d\varphi \sin\varphi$ rückständig erhalten, welches nach Formel 21) sich

$= -\varphi \cos\varphi + \int \cos\varphi \, d\varphi = -\varphi \cos\varphi + \sin\varphi$ ergibt.

Eben so werden wir nach r maliger Anwendung der Formel 28) das rückständige Integrand $\int \varphi \cos\varphi \, d\varphi$ erhalten, welches nach Formel 26) sich

$= \varphi \sin\varphi - \int \sin\varphi \, d\varphi = \varphi \sin\varphi + \cos\varphi$ ergibt.

§. 35. Allerdings würde ich nun diesem Capitel noch mancherlei Integrirungen hinzufügen können. Aber bedürfen werden wir ihrer nicht; und etwa der Vollständigkeit wegen, dieses Lehrbuch für Anfänger und künftige Practiker anschwellen zu lassen, würde um so tadelnswürdiger seyn, da selbst auch in den gröfsern Werken der Integralrechnung eine hie und da beabsichtigte Vollständigkeit meistens nur relativ, und auf Klassificationen begründet ist, welche selbst nicht nur mangelhaft sind, sondern zum Theil auch dem weitern Fortschreiten dieser unerschöpflichen Wissenschaft durch eingeschränkte Ansichten hinderlich werden können.

Vierzehntes Capitel.

Integrirung einiger Exponentialgröſsen.

§. 1.

I) $\int h^z . dz = h^z + C$, folgt sogleich aus Diff.R. XII. §. 5. (8

II) $\int a^z . dz . l a = a^z + C$ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ §. 3. (3

auch $= h^{zla} + C$, für Berechnung bequemer.

(Dortiger §. 8.)

Ist m eine constante Gröſse, so hat man

III) $\int h^{mz} dz = \frac{h^{mz}}{m} + C$, weil ja $d . a^{mz} = m h^{mz} dz$

(dortiger §. 5. (7)

IV) $\int a^{mz} dz = \frac{a^{mz}}{m l a} + C$, weil ja $d . a^{mz} = m a^{mz} . dz . l a$

(dort. §. 4 (5)

auch $= \frac{h^{mzla}}{m l a} + C$ für bequemere Rechnung

(dort. §. 8.)

§. 2. V) Auch $\int (x^z dz . l x + z x^z d l x) = x^z + C$ (also, nach dortigem §. 8. auch $= h^{zlx} + C$) muſs allerdings, und ebenfalls unmittelbar aus dortigem §. 2. (1 sich ergeben; aber es ist selten, daſs man auf einen so glücklich zusammen gehörigen zweigliedrigen Integranden trifft: und die eingliedrigen sind gar häufig eben darum nicht geradezu und genau integrirbar, weil ihnen das zweite dazu gehörige Glied fehlt.

Wenn wir hiebei nach dem dortigen allgemeinen $d . x^z$, nämlich $d . x^z = x^z (l x . dz + z . d l x)$, im dortigem §. 2., es bedenken, daſs selbst auch, für $z = x$ gegeben, das zweigliedrige

$d . x^x = x^x (l x . dx + x . d l x)$ eintreten muſs: so

sehen wir die Ursache ein, warum durch eine einzige veränderliche Gröſse, wenn sie einmal als Stammgröſse, und einmal als Exponent, oder als logarithmische Gröſse vorkommt, die Integrirung eben solchen Beziehungen und Schwierigkeiten unterworfen seyn kann, als wir bei Differentialen, mit zwei veränderlichen Gröſsen zu behandeln haben; daher denn selbst auch die beiden Integranden, $\int a^{mx} x^n \, dx$ und $\int x^m (lx)^n \, dx$, mit constanten m und n uns etwas zu schaffen machen.

Gerade diese beiden, mit den ihnen unterworfenen merkwürdigen einzelen Fällen, werden mit Recht von den Analysten vorzüglich behandelt. Ich halte aber für nöthig, diese Behandlung umständlicher und systematischer, als ich vorgefunden habe, darzustellen, wenn man nicht beim wirklichen Gebrauche für angewandte Mathematik, gar häufigen, und dann sehr unangenehmen Anstoſs finden soll. Auch wird man nie zur deutlichen theoretischen Uebersicht dieser Formeln gelangen, wenn man nicht die Reihen der folgenden Aufgabe mit einander vor Augen gehabt, auch mit diesen Reihen, mehrere in der Differentialrechnung bereits gefundene Differentiale, nebst den logarithmischen Differentialen der algebraischen Function x^m in Verbindung gebracht hat.

§. 3. *Aufgabe.*

Die Exponentialgröſsen der ersten Höhe x^z und a^z (Diff.R. XII. §. 1.) durch eine Reihe nach Logarithmen der Stammgröſsen auszudrücken (auch das algebraische x^m mit constantem m, weil man dergleichen Reihe desselben mit jenen Reihen ofte zu verbinden hat).

§. 4. *Auflösung.*

Da nach der Logarithmik, Diff.R. X. §. 37, allemal

$$Y = 1 + \frac{\operatorname{Log} Y}{1 \cdot A} + \frac{(\operatorname{Log} Y)^2}{2 \cdot A^2} + \frac{(\operatorname{Log} Y)^3}{2 \cdot 3 \cdot A^3} + \frac{(\operatorname{Log} Y)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot A^4} + \ldots \text{ ist,}$$

und $Y = x^z$ gesetzt, uns $\operatorname{Log} Y = z \operatorname{Log} x$ gibt: so haben wir

$$\text{I)}\quad x^z = 1 + \frac{z \operatorname{Log} x}{1 \cdot A} + \frac{z^2 (\operatorname{Log} x)^2}{1 \cdot 2 \cdot A^2} + \frac{z^3 (\operatorname{Log} x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot A^3} + \ldots.$$

dessen A die Subtangente in einem beliebigen b; Systeme bedeutet, dem die Log Y und Log x zugehörig gedacht werden. Für die natürlichen Logarithmen also

$$\text{II)}\quad x^z = 1 + \frac{z \log x}{1} + \frac{z^2 . (\log x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3 . (\log x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4 . (\log x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots$$

$$\text{III)}\quad [\text{auch } x^m = 1 + \frac{m\, l x}{1} + \frac{m^2 . (l x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 . (l x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^4 . (l x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots \text{ für}$$

das algebraische x^m mit constantem m.]

$$\text{IV)}\quad a^z = 1 + \frac{z\, l a}{1} + \frac{z^2 . (l a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3 . (l a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4 . (l a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3\, 4} + \ldots$$

$$\text{V) auch}\quad a^{mz} = 1 + m z\, l a + \frac{m^2 z^2 . (l a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 z^3 . (l a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

es mag hier m constant oder veränderlich seyn, weil ja z in IV) schon jede veränderliche Gröſse bedeuten kann.

Doch wollen wir in der Folge, falls nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert ist, unter m nur eine constante Gröſse verstanden wissen.

VI) $h^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \ldots$

$h = 2,7182818\ldots$, als die Basis des hyperbolischen Systemes bedeutend; daſs also in der Reihe IV) jedes $\log a = \log h = 1$ ist.

§. 5.

Die folgenden 8 Differential-Ausdrücke

$d.x^z = x^z\,(lx.dz + z.d\,lx) \ldots\ldots\ldots\ldots$ (1

$d.x^z = x^z\,lx.dz + x^{z-1}z\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots$ (2

$d.b^z = b^z dz.lb \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (3

$d.b^{mz} = b^{mz} d.mz.lb$, für jedes $m \ldots\ldots$ (4

$d.b^{mz} = mb^{mz} dz.lb$, für ein constantes $m \ldots$ (5

$d.h^{mz} = h^{mz} d.mz$, für jedes $m \ldots\ldots\ldots$ (6

$d.h^{mz} = mh^{mz} dz$, für ein constantes $m \ldots$ (7

$d.h^z = h^z dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (8

haben wir in Diff. R XII. §. 2 bis §. 5 bereits gefunden.

Aus den obigen VI) Reihen aber wollen wir auch auf die folgenden theils eingliedrigen, theils mehrgliedrigen Differential-Ausdrücke (9 bis (16 schlieſsen.

Aus III), der Reihe für das algebraische x^m folgt

$d.x^m = m\,d\,lx + \frac{m^2}{1} lx\,d\,lx + \frac{m^3}{1.2}(lx)^2\,d\,lx + \frac{m^4}{1.2.3}(lx)^3\,d\,lx \ldots$ (9

auch $= m\,[1 + \frac{m}{1} lx + \frac{m^2}{1.2}(lx)^2 + \frac{m^3}{1.2.3}(lx)^3 + \ldots].\,d\,lx$ (9*

auch $= m\,x^m.d\,lx$, durch III) selbst, $\ldots\ldots$ (10

Da dieses auch $= m\,x^m \frac{dx}{x} = m\,x^{m-1}dx$ ist: so sehen wir hiermit das bekannte algebraische Differential $d\,x^m = m\,x^{m-1}\,dx$ auch durch logarithmisches Differential ausgedrückt, als unendliche Reihe in (9 als

einen eingliedrigen, und in sofern endlichen Ausdruck, in (10.

Aus V), unter der Bedingung, daſs m nur constant sey, folgt

$$d.a^{mz} = dz.\,m\,l\,a + z\,dz.\,m^2\,(la)^2 + \frac{z^2\,dz}{2}\,m^3\,(la)^3$$
$$+ \frac{z^3\,dz}{2.3}.\,m^4\,(la)^4 \ldots\ldots \quad (11$$

$$\text{auch} = \left(1 + mz\,la + \frac{m^2 z^2 (la)^2}{2} + \frac{m^3 z^3 (la)^3}{2.3} + \ldots\right) dz.\,m\,la \quad (12$$

also auch $= a^{mz}.\,dz.\,m\,l\,a$, im endlichen Ausdrucke, wie (5.

$$\text{Aus VI) folgt } d.h^z = dz + z\,dz + \frac{z^2\,dz}{2} + \frac{z^3\,dz}{2.3} + \ldots \quad (13$$

$$\text{auch} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} \ldots\right) dz \quad (13^*$$

also auch $= h^z\,dz$, im endlichen Ausdrucke, wie in (8 . . . . (14

§. 6.

Um nun auf ähnliche Weise auch $d.x^z$ sowohl im Reihen- als im endlichen Ausdrucke neben einander zu finden, bedenken wir zuvörderst, wie es für $d.XY = Y\,dX + X\,dY$ in Diff.R. VII. §. 19 schon bemerkt ist, daſs dieses Differential des Productes zweier veränderlichen Gröſsen, als die S u m m e aus den b e i d e n p a r t i e l l e n D i f f e r e n t i a l e n ${}^{x}d.XY$ und ${}^{y}d.XY$ kann gefunden werden. Da nämlich
eben so auch $d.x^z = {}^{x}d.x^z + {}^{z}d.x^z$ seyn muſs, und

$$^{x}d.x^{z} = zd\,lx + z^2\,lx\,d\,lx + \frac{z^3}{2}(lx)^2\,d\,lx + \ldots \text{ ist, nach (9}$$

$$^{z}d.x^{z} = dz.lx + z\,dz.(lx)^2 + \frac{z^2\,dz}{2}.(lz)^3 + \ldots \text{ ist, nach (11}$$

$$\text{so mufs } d.x^{z} = d.(z\,lx) + d.\frac{z^2(lx)^2}{2} + d.\frac{z^3(lx)^3}{2.3} + \ldots \text{ seyn, } \ldots (15$$

indem ja $d.(z\,lx) = z\,d\,lx + lx\,dz$ ist,

ferner $\dfrac{d.z^2(lx)^2}{2} = z^2.lx\,d\,lx + (lx)^2\,z\,dz$ ist; u. s. w.

Da nun ferner $^{x}d.x^{z}$ auch $= z\,x^{z}\,d\,lx$ ist, nach (10,
und $^{z}d.x^{z}$ auch $= x^{z}\,dz.lx$ ist, nach (12;
so stimmen auch die hier gefundenen Reihen damit ûberein,

dafs $d.x^{z} = x^{z}(z.d\,lx + lx.dz)$ ist, wie nach (1 ..... (16.

Behandlung der Integranden $\int a^{mx}x^{n}dx$ und $\int x^{m}(\log x)^{n}dx$ *mit ihren merkwürdigsten einzelen Fällen.*

§. 7. Absichtlich werde ich das letzte Integrand, obgleich és, bei dessen hier vorausgesetzten constanten m und n blofs logarithmisch ist, dennoch erst hinter jenem exponentialen behandeln. Für beide werde ich zuvörderst nur diejenigen Integrirungen darstellen, welche sich aus den Reihen in §. 4. leichte finden lassen, die übrigen erst nachher dem theilweisen Integriren unterwerfen. Nicht blofs für Anfänger dürfte diese abgesonderte Behandlung rathsam seyn.

§. 8.

Da $a^{mx} = 1 + \frac{m\,la}{1}.x + \frac{(m\,la)^2}{1.2}.x^2 + \frac{(m\,la)^3}{1.2.3}.x^3 + \ldots$ ist, so mufs (§. 4. V.) ...

$$\int a^{mx} x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{m\,la}{1}.\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{(m\,la)^2}{1.2}.\frac{x^{n+3}}{n+3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \frac{(m\,la)^{r-1}}{1.2\ldots(r-1)}.\frac{x^{n+r}}{n+r}\ldots\ldots + C\ldots\ldots \text{seyn.} \quad (1$$

Die Reihe geht allemal ohn' Ende fort, und zwar mit steigenden Potenzen des x, wenn n eine bejahte Zahl ist. Ist n eine verneinte ganze Zahl $= -r$, so ist im rten Gliede der veränderliche Faktor $\frac{x^{n+r}}{n+r} = \frac{x^0}{0} = \log x$, in den folgenden Gliedern aber wiederum algebraisch, $\frac{x^1}{1}$; $\frac{x^2}{2}$ u. s. w. und ebenfalls steigend ohn' Ende. Die Reihe ist daher nur bisweilen brauchbarer, als andere, die wir nachher angeben werden. Sogleich aber ist von ihr zu merken, dafs sie für $n = -1$ gibt

$$\int a^{mx}\frac{dx}{x} = lx + \frac{m\,la}{1}.\frac{x}{1} + \frac{(m\,la)^2}{1.2}.\frac{x^2}{2}$$

$$+ \frac{(m\,la)^3}{1.2.3}.\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots C\ldots\ldots \quad (2$$

§. 9. Da $\int x^m (\log x)^n\,dx$ auch $= \int x^{m+1}(\log x)^n \frac{dx}{x}$ also $= \int x^{m+1}(\log x)^n\,d\,lx$ ist; zufolge der Reihe III) in §. 4. aber auch seyn mufs

$$x^{m+1} = 1 + \frac{(m+1)}{1}lx + \frac{(m+1)^2}{1.2}(lx)^2 + \frac{(m+1)^3}{1.2.3}(lx)^3 + \ldots$$

so wird sich, Gliederweise integrirt, ergeben

$$\int x^m (lx)^n\,dx = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + \frac{(m+1)}{1}\frac{(lx)^{n+2}}{n+2}$$

$$+ \frac{(m+1)^2}{1.2}\frac{(lx)^{n+3}}{n+3} + \ldots\ldots \quad (3$$

Ist n eine verneinte ganze Zahl $= - r$, so ist ein (r—1)tes Glied

$$= \frac{(m+1)^{r-1}}{1.2.\ldots r-1.} \frac{(lx)^0}{0} \overset{\text{I. §. 15.}}{=\!=\!=} \frac{(m+1)^{r-1}}{1.2.\ldots r.\, r-1.} llx.$$ Die nächstfolgenden aber sind

$$\frac{(m+1)^r}{1.2.\ldots.r.} \frac{\log x}{1}, \frac{(m+1)^{r+1}}{1.2.\ldots.r+1.} \frac{(\log x)^2}{2}$$ u. s. w., also sämmtlich wiederum einfach logarithmisirt, da hingegen llx den Logarithmen des Logarithmen des x bedeutet.

Für den wiederum vorzüglich merkwürdigen Fall, dafs $n = -1$ ist, hat man

$$\int \frac{x^m dx}{lx} = llx + \frac{m+1}{1} \cdot \frac{lx}{1} + \frac{(m+1)^2}{1.2} \cdot \frac{(lx)^2}{2}$$
$$+ \frac{(m+1)^3}{1.2.3} \cdot \frac{(lx)^3}{3} + \ldots + C \ldots (4$$

$m = -1$ gegeben in der Reihe (3, hat man

$\int \frac{(lx)^n . dx}{x} = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + 0$, überdies auch dadurch schon bekannt, dafs $\frac{dx}{x} = d\,lx$

und $\int (lx)^n d\,lx = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1}$ seyn mufs, durch algebraische Integrirung C. I. §. 12.

In der Reihe 4) den Exponenten $m = 0$ gesetzt, gibt

$$\int \frac{dx}{lx} = llx + \frac{lx}{1} + \frac{(lx)^2}{2.2} + \frac{(lx)^3}{2.3.3} + \frac{(lx)^4}{2.3.4.4} + \ldots\ldots (5$$

§. 10. Dieser letzte, sehr merkwürdige Ausdruck des $\frac{dz}{lz}$, indem ich hier absichtlich z statt x schreiben will, verdient auch unmittelbar auf folgende deutliche Weise begründet zu werden. Es ist näm-

lich $z = 1 + lz + \frac{(lz)^2}{2} + \frac{(lz)^3}{2.3} + \ldots$ (Diff.R. X. §. 37.) also

$$\int\frac{dz}{lz} = \int\frac{dz}{z.lz}.z = \int\frac{dz}{z.lz}\left\{1 + lz + \frac{lz^2}{2} + \frac{lz^3}{2.3} + \frac{lz^4}{2.3.4} + \ldots\right\}$$

$$= \int\left[\frac{d.lz}{lz} + \frac{dz}{z} + \frac{lz\,d\,lz}{2} + \frac{(lz)^2.d\,lz}{2.3} + \frac{(lz)^3.d\,lz}{2.3.4} + \ldots\right]$$

also $\int\frac{dz}{lz} = llz + lz + \frac{(lz)^2}{2.2} + \frac{(lz)^3}{2.3.3} + \frac{(lz)^4}{2.3.4.4} \ldots$ völlig wie in obiger (5.

§. 11. Da nun $z = a^{mx}$ gesetzt,
sich $dz = d.a^{mx} = a^{mx}dx.m\,la$ (§. 5. No. 5.)
und $lz = l.a^{mx} = mx\,la$ ergiebt:

so hat man $\frac{dz}{lz} = \frac{a^{mx}dx}{x}$. Vermittelst der Reihe (5

also $\int\frac{a^{mx}dx}{x} = l(mx\,la) + mx\,la + \frac{m^2x^2la^2}{2.2} + \frac{m^3x^3la^3}{2.3.3} + \ldots$ (6

Da ferner $z = x^{m+1}$ gesetzt,
sich $dz = (m+1)x^m dx$
und $lz = (m+1)lx$ ergibt:

so hat man $\frac{dz}{lz} = \frac{x^m dx}{lx}$, also vermittelst der Reihe (5

auch $\int\frac{x^m dx}{lx} = l(m+1)lx + (m+1)lx + \frac{(m+1)^2(lx)^2}{2.2}$

$$+ \frac{(m+1)^3.(\log x)^3}{2.3.3} + \ldots \text{ (7}$$

§. 12. Die Reihe (6 ist mehr als (2 [die Reihe (7 mehr als (4] in ihrem ersten Gliede bestimmend. Jene Unbestimmtheit rührt daher, dafs die Reihe a^{mx} (§. 4. No. V) [und die Reihe für x^{m+1} (§. 9)] in ihrem ersten Gliede nur 1 haben, die Integranden-

Reihe also blofs $\frac{dx}{x}$ $\left[\text{und } \frac{d\,lx}{lx}\right]$ im ersten Gliede, nichts aber vom a^m [und m] in sich erhalten; in der Integranden-Reihe für $\frac{dz}{lz}$ aber das erste Glied, ob es gleich allerdings auch nur $\frac{d\,lz}{lz}$ ist, doch dessen ungeachtet hier vollständig bestimmend wird, weil ja hier lz die ganze Function ausmacht; daher denn durch $z = a^{mx}$, oder $= x^{m+1}$ gesetzt, auch die Function a^{mx} und x^m mit gefafst wird.

In den meisten Fälle hat man für die Integrale, welche wir seit §. 3. behandelt haben, noch anderer Reihen nöthig. Nicht nur würden sie für sich selbst schon, um richtig gefafst und gebraucht zu werden, eine sorgfältige Behandlung verdienen, sondern es ist die Methode, durch welche sie gefunden werden, auch von anderweitigem ausgedehnten Gebrauche für mancherlei Abreichung der Integranden, und dabei so geartet, dafs sie auch von Anfängern am besten wird begriffen werden, wenn ich sie mit Sorgfalt a l l g e m e i n und systematisch darzustellen suche. Dabei ist es auch rathsam, die Grundlage dieser Methode, die Integrirung zweier urveränderlichen Gröfsen, obgleich sie oben für die Reductionen algebraischer, logarithmischer und trigonometrischer Integrale schon benutzt ist, hier auf's neue vor Augen zu stellen.

§. 13. Dafs 1) $\int(u\,dv + v\,du) = uv + C$ seyn mufs, und indem wir hier der Kürze wegen nicht fernerhin die Constante anschreiben wollen,

dafs 2) $\int\left(\frac{dz}{u} - \frac{z\,du}{uu}\right) = \frac{z}{u}$ seyn, und eben defshalb bei den folgenden transcendenten Functionen,

auch 3) $\int\left(lz.dx + x\frac{dz}{z}\right) = \log z^x$

und 4) $\int(z^x dx . lz + z^x x\, d\, lz) = z^x$ seyn muſs, davon sind wir dadurch überzeugt, daſs uns eben diese hier aufgeführten zweigliedrigen Differentiale nach einander

1) als $d.uv$; 2) als $d.\frac{z}{u}$ (Diff.R. VII § 22 u. 23)

3) als $d.x\,lz$ und 4) als $d.z^x$, aus Diff.R. XII. §. 2 schon bekannt sind.

§. 14. Eben so wissen wir, daſs

$$\int\left(x^n . a^{mx} dx + \frac{a^{mx}}{m\,la} . n x^{n-1} dx\right) = \frac{x^n a^{mx}}{m\,la}$$ seyn muſs,

weil es dem $\int(X.d\mathfrak{X} + \mathfrak{X}.dX) = X.\mathfrak{X}$ unterworfen ist, wenn $x^n = X$, und $\frac{a^{mx}}{m\,la} = \mathfrak{X}$ gesetzt wird (M. s. §. 5. No. (5)).

§. 15. Wenn uns aber etwa lediglich $\int X\mathfrak{X}dx$ gegeben ist, in welchem zwar X sowohl als $\mathfrak{X}$ Functionen von einerlei urveränderlichem x, aber doch von so verschiedener Art sind, daſs sie als ein einfaches Differentialproduct, als ein $\int(X\mathfrak{X})dx$ nicht integrirt werden können, sondern die beiden Functionen X und $\mathfrak{X}$ als zwei Variable neben einander behandelt werden müssen: so erhellet es aus den uns bekannt gewordenen Differentialformen, daſs in Beziehung auf diese, und so lange wir von diesen ausgehen müssen, dergleichen vorgegebenes Integrand $\int X\mathfrak{X}dx$ noch eines zweiten Gliedes bedürfe, um ein vollständiges Integral der beiden Variabeln X und $\mathfrak{X}$ an die Hand zu geben.

§. 16. Das theilweise Integriren

ist nun zur Behandlung eines solchen Integranden eine sehr anstellige Methode. Um in dieser Hinsicht das theilweise Differenziiren, als solches, deutlich vor Augen zu haben, mag ${}^{v}d.uv$ bedeuten, daſs in der Function uv bloſs v mit einem Differentiale belegt werden solle, und eben so dagegen ${}^{u}d.uv$ bedeuten, daſs lediglich u belegt werden solle; indeſs durch das uneingeschränkte d im $d.uv$ fernerhin wie bisher bedeutet wird, daſs die beiden veränderlichen u und v auch beide, als solche differenziirt werden sollen: so ist es sehr offenbar, daſs das

allgemeine Differential $d.uv = u\,dv + v\,du$
allerdings $= {}^{v}d.uv + {}^{u}d.uv$, nämlich die Summe aus den beiden partiellen Differentialen seyn muſs, auch als solche kann gefunden werden. (Vergl. Diff.R. VII. §. 22.)

§. 17. Wenn man nun für das theilweise Integriren geradezu den Rückweg dieses theilweisen Differenziirens einschlagen wollte, so müſste man schlieſsen: es

muſs $\int(u\,dv + v\,du) = \frac{1}{2}({}^{v}\!\int u\,dv + {}^{u}\!\int v\,du)$ dergestalt seyn, daſs sowohl ${}^{v}\!\int u\,dv$, als auch ${}^{u}\!\int v\,du$, jedes für sich schon das dem $\int(u\,dv + v\,du)$ zugehörige Integral ausmache; weil ja durch das theilweise Differenziiren die beiden Theile des Differentiales aus einer Function entstanden seyn würden.

In der That würde man eben so auch

$$\int\frac{u\,dz - z\,du}{u^2} = \frac{1}{2}\left({}^{z}\!\int\frac{dz}{u} - {}^{u}\!\int\frac{z\,du}{u^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{u} + \frac{z}{u}\right) = \frac{z}{u}$$

sehr richtig finden; und eben so

auch $\int\left(z^x dx\, l\, z + z^x x \frac{dz}{z}\right) = \frac{1}{2}\left({}^x\!\int z^x dx\, l\, z + {}^z\!\int z^x x\, d\, l z\right)$

sehr richtig finden. $= \frac{1}{2}\left(z^x + z^x\right) = z^x$

Es dürfte auch dieses Verfahren sehr zu empfehlen seyn, um bei vorgegebnen zwei; (auch mehr;) gliedrigen Differentialen recht gewiſs zu werden, daſs die zwei (oder auch mehre) Glieder zusammen genommen, eben deshalb das **Integral einer Function** ausmachen, weil ihre Glieder theilweise integrirt, eben diese Function 2; (auch mehr;) mal geben. (M. s. Diff.R. XXII. §. 6.)

§. 18. Für ein vorgegebnes eingliedriges $\int X \mathfrak{X} dx$ aber kann dieses nur durch folgende Schlüsse benutzt werden.

Wenn man lediglich des vorgegebenen Integranden Partialproduct $\mathfrak{X} dx$ integrirt, und dieses $\int \mathfrak{X} dx = \mathfrak{S}'$ gefunden, den übrigen Factor X aber als constant behandelt, nämlich unbelegt gelassen,

also ${}^x\!\int X . \mathfrak{X} dx = X . \mathfrak{S}'$ gefunden hat,

folglich ${}^x\!\int \mathfrak{X} dx . X + {}^x\!\int \mathfrak{S}' . dX = \mathfrak{S}' X + \mathfrak{S}' X$ finden würde:

so muſs $\int (X \mathfrak{X} dx + \mathfrak{S}' dX) = \mathfrak{S}' X$ seyn.

§. 19. Indem man nun benutzen will, daſs

auch $\int X \mathfrak{X} dx + \int \mathfrak{S}' dX = \mathfrak{S}' X$ seyn muſs: so wird dabei

1) voraus gesetzt, daſs im ersten Integranden nicht nur X, sondern auch $\mathfrak{X}$, im zweiten nicht nur X sondern auch $\mathfrak{S}' = \int \mathfrak{X} dx$ als veränderlich behandelt werden solle; und indem man dann ferner

2) daraus folgert, daſs $\int X \mathfrak{X} dx = X . \mathfrak{S}' - \int \mathfrak{S}' dX$ seyn müsse: so hat man hiedurch für das vor-

gegebne Integrand einen zweigliedrigen Ausdruck gewonnen, dessen erstes Glied $\mathfrak{S}'X$ durch theilweises Integriren des vorgegebnen Integranden allerdings gefunden ist.

§. 20. Solch ein Auffinden des ersten Gliedes durch theilweises Integriren, wird nun für das rückständige Integrand auf folgende erste oder zweite Weise fortgesetzt, je nachdem ein Iter oder IIter, oder statt des IIten auch ein III-ter Fall eintritt.

Iter Fall.

Sey $\frac{dX}{dx} = Q'$ dergestalt gefunden, dafs man voraussieht, es werde auch der zweite Differentialquotient $\frac{ddX}{dx^2} = Q''$, auch der dritte $\frac{d^3X}{dx^3} = Q'''$ und s. w. in bequemen Ausdrücken Q''; Q''' u. s. w. sich ergeben; und sey überdies vorher zu sehen, dafs aufser dem ersten bereits gefundenen Integrale $\int \mathfrak{X} dx = \mathfrak{S}'$ auch das zweite $\int \mathfrak{S}' dx = \mathfrak{S}''$, auch das dritte $\int \mathfrak{S}'' dx = \mathfrak{S}'''$ u. s. w. sich bequem auffinden lasse: so wird man das §. 19 No. 2 rückständige Integrand $\int \mathfrak{S}' dX$ als $\int \mathfrak{S}' \frac{dX}{dx} dx = \int \mathfrak{S}' Q' dx$, auch als $\int \mathfrak{S}' Q' dx = Q' \mathfrak{S}'' - \int \mathfrak{S}'' dQ'$ zu finden, und dann ferner auch $\int \mathfrak{S}'' dQ' = Q'' \mathfrak{S}' - \int \mathfrak{S}''' dQ''$ zu finden fortfahren.

§. 21. Die hiemit nach und nach gefundenen ersten Glieder des jedesmal rückständigen Integranden, mit gehöriger Beachtung ihres wechselnden Zeichens benutzt, haben wir nun schon gefunden

$$\int \mathfrak{X} dx . X = X\mathfrak{S}' - Q'\mathfrak{S}'' + Q''\mathfrak{S}''' - \int \mathfrak{S}''' dQ'',$$

$$\text{als} = X \int \mathfrak{X} dx - \frac{dX}{dx} \int . \int \mathfrak{X} dx . dx$$

$$+ \frac{d^2X}{dx^2} . \int^3 \mathfrak{X} dx^3 - \int . \int^3 \mathfrak{X} dx^3 . \frac{d^2X}{dx^2}; \ldots \text{(8}$$

und sehen hieraus schon,

$$\text{daſs} \mp Q^{(n-1)} . \mathfrak{S}^{(n)} \pm \int \mathfrak{S}^{(n)} . dQ^{(n-1)}$$

$$\text{das ist} \mp \frac{d^{(n-1)} . X}{dx^{n-1}} {}^n\!\int \mathfrak{X} dx^n \pm \int . {}^n\!\int \mathfrak{X} dx^n . d \frac{d^{n-1} X}{dx^{n-1}}$$

das $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gerade}}{\text{ungerade}}$ nte Glied mit seinem rückständigen Integranden darstellt, auch dieses letzteren absolute Gröſse als $\int \mathfrak{S}^n dx . Q^n$ geschrieben, wiederum die Form des vorgegebnen Integranden hat, also wiederum wie dieser in ein schon integrirtes Glied, und einen noch rückständigen Integranden zerlegt werden kann; falls nicht etwa $\frac{d^n X}{dx^n} = Q^n$ schon constant sich ergeben hat, z. B. wenn $X = x^n$ oder $X = (\log x)^n$ gegeben, und n eine bejahte ganze Zahl wäre.

§. 22. Wenn indessen das letztere, nämlich $X = (\log x)^n$ gegeben wäre, und dessen $dX = n (\log x)^{n-1} d \log x$, wegen der andern Function, als $\frac{dX}{dx} = n \frac{(\log x)^{n-1}}{x}$ hätte gebraucht werden müssen: so würde schon das nächste $d \frac{dX}{dx}$ zur bequemen Reihenform nicht einfach genug ausfallen, und somit schon der folgende IIte Fall eintreten können.

IIter Fall.

§. 23. Wenn im vorgegebnen $\int \mathfrak{X} dx . X$, die X, wie vorhin, diejenige Function bedeutet, welche

zur Entwickelung der Reihe immerfort differenziirt werden soll, gleichwol von der Art ist, dafs etwa schon die X selbst, oder doch ihr $\frac{dX}{dx} = Q'$, auch andere folgende Differentialquotienten nicht bequem und einfach genug sich würden differenziiren lassen, wohl aber, wenn sie vorher mit einem Factor q, q', q'' u. s. w. multiplicirt würden, dann sich einfache, für die Reihe gut anstellige Differentialquotienten

$$d.\frac{qX}{dx} = R'; \ \frac{dq'dqQ}{dxdx} = R''; \ \frac{dq''dq'dX}{dx^3} = R''' \ldots \text{ergeben,}$$

und dabei

$$\int\frac{\mathfrak{X}}{q}dx; \quad \int\frac{1}{q'}\int\frac{X}{q}dx.dx; \quad \int\frac{1}{q''}\int\frac{1}{q'}\int\frac{X}{q}dx.dx.dx \text{ u. s. w.}$$

als $\mathfrak{S}'$; $\mathfrak{S}''$; $\mathfrak{S}'''$ u. s. w. gefunden, auch bequeme Integrale ausmachen würden: so wird im vorgegebnen, und in jedem rückständigen Integranden, wo es nöthig ist, dergleichen sich selbst aufhebende Multiplication des Differentianden und Division des Integranden unternommen, und indem man übrigens wie vorhin verfährt, dadurch folgende Reihe erhalten:

$$\int\mathfrak{X}dx.X = \int\frac{\mathfrak{X}}{q}dx.qX =$$

$$qX\int\frac{\mathfrak{X}}{q}dx - \frac{q'd.qX}{dx}\int\frac{1}{q'}\int\frac{\mathfrak{X}}{q}dx.dx + \frac{q''dq'd.qX}{dxdx}\int\frac{1}{q''}\int\frac{1}{q'}\int\frac{\mathfrak{X}}{q}dx.dx.dx \ldots$$

$$\ldots \pm q^{(n)}R^{(n)}\mathfrak{S}^n \pm \int\frac{\mathfrak{S}^n}{q^{(n+1)}}dx.q^{(n+1)}\frac{d.q^{(n)}R^n}{dx} \ldots \quad (9$$

Das aufgeführte allgemeine Glied mit seinem rückständigen Integranden ist das n;te der Reihe, wenn das erste als vorangehendes Glied nicht mitgezählt wird; und $q^{(n+1)}$ bedeutet denjenigen veränderlichen, x enthaltenden Factor, mit welchem im

rückständigen Integranden dessen Differentiand multiplicirt werden mufs, um für das nächstfolgende Glied einen schicklichen Differentialquotienten zu haben.

§. 24. *Als IIIter Fall*

mag aufgeführt werden, wenn man die Function $\mathfrak{X}$ selbst, im $\int \mathfrak{X} dx$, oder auch ihre schon gefundenen Integrale $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ u. s. w. durch ein q oder q′, q″ u. s. w. zu dividiren genöthigt ist, um bequem integriren zu können, dabei aber zur Aufhebung dieser Division der übrige, und für das nächste Glied zu differenziirende Theil des vorgegebenen oder rückständigen Integranden, durch eben dieses q, q′, q″ u. s. w. unschädlich multiplicirt werden kann. Die allgemeine Form der Reihe bleibt die vorige, um so mehr, je mehr es gewöhnlich zutrifft, dafs man gerade im IIIten Falle den integranden Theil zu dividiren, den differentianden Theil zu multipliciren nöthig finden wird. In umgekehrten Fällen indessen würde ja auch q, q′, q″.... für $\frac{1}{q}, \frac{1}{q'}, \frac{1}{q''}$...., und dagegen $\frac{1}{q}, \frac{1}{q'}, \frac{1}{q''}$....... für q, q′, q″.... gelten können.

§. 25. *Zusatz.*

Sollte das vorgegebne Integrand ein $\int \mathfrak{X} d\mathfrak{X} . X$ seyn, dafs nämlich $\mathfrak{X}$ selbst die urveränderliche Gröfse wäre, auch bei Entwickelung der Reihe auf $d\mathfrak{X}$ differenziirt und integrirt werden könnte: so würde zwar im Iten Falle die allgemeine Form der Reihe wiederum

$$\int \mathfrak{X} d\mathfrak{X} . X = X \int \mathfrak{X} d\mathfrak{X} - \frac{dX}{d\mathfrak{X}} \int . \int \mathfrak{X} d\mathfrak{X} . d\mathfrak{X} + \frac{dd\mathfrak{X}}{d\mathfrak{X}^2} . \int^3 \mathfrak{X} d\mathfrak{X}^3 - \ldots$$

aber auch $= X \frac{\mathfrak{X}^2}{2} - \frac{dX}{d\mathfrak{X}} . \frac{\mathfrak{X}^3}{2.3} + \frac{dd\mathfrak{X}}{d\mathfrak{X}^2} . \frac{\mathfrak{X}^4}{2.3.4} - \ldots$ seyn... (10

Und auch hiebei wird sowohl der obige IIte, als der IIIte Fall eintreten können, daſs man nemlich die Differentianden oder Integranden, um bequeme Ausdrücke dafür zu erhalten, zuvor durch eine $\mathfrak{X}$function zu multipliciren oder zu dividiren nöthig hat.

§. 26. *Anmerkung.*

So sehr ich übrigens hoffe, daſs die obige allgemeine Darstellung dieser Zerlegungsmethode für Anfänger und Geübte nützliche Ueberschauungen gewähren wird; so muſs ich übrigens doch allerdings erinnern, daſs man in der Ausübung nicht allemal die allgemeine Reihe (8 oder (9 befolgen, sondern lieber aus freier Hand zu zerlegen suchen mag, indem man aus dem rückständigen Integranden, wie aus dem vorgegebnen, auf das nächstfolgende Glied der Reihe schlieſst; besonders da man selbst in solchen Fällen, wo sich schon $\int.\int\mathfrak{X}dx.dx$ nicht gut will integriren lassen, und selbst auch ein $\int\frac{1}{q}\int\frac{\mathfrak{X}}{q}d.dx$, das sich bequem integriren lieſse, nicht darstellen will, dennoch jene Zerlegungsmethode bei einem dieser Glieder hier ergreift, dann aber das zweite Glied so ausdrückt, daſs es noch alle folgenden in sich hat, und nun sieht, ob sich das rückständige Integrand so ausdrücken lasse, daſs es dem vorgegebnen ähnlich werde, und deshalb die Form der schon gefundenen beiden Glieder auch für weitere Entwickelung dienen könne. Fur die beiden uns vorzüglich beachtungswerthen Integranden (§. 7.) werden uns beide Reihen sehr gute Dienste leisten.

$\int a^{mx} x^n dx$ *als Beispiel für Fall I behandelt.*

§. 27. Für das erste Integrand ist in §. 8. allerdings schon die Reihe (1 gefunden. Wenn wir aber eben dasselbe auch der obigen Methode des partiellen Integrirens unterwerfen: so werden dadurch noch zwei andere Reihen, und beide sehr bequem und leicht gefunden, indem dabei der sehr bequeme Ite Fall (§. 20) eintritt, nicht nur wenn man

erstens das dortige $X = x^n$, folglich das dortige $\mathfrak{X} = a^{mx}$ setzt; dann neben den sämmtlichen Differentialquotienten

$$\frac{dX}{dx} = n x^{n-1};\ \frac{ddX}{dx^2} = n.n-1.x^{n-2} \text{ u. s. w.}$$

auch $\int \mathfrak{X} dx = \frac{a^{mx}}{m\,l\,a}$; $\int.\int \mathfrak{X} dx.dx = \frac{a^{mx}}{(m\,l\,a)^2}$ u. s. w.

als die sämmtlichen Integrale in sehr bequemen Ausdrücken sich ergeben; **sondern auch** wenn man

zweitens das dortige $X = a^{mx}$, folglich das dortige $\mathfrak{X} = x^n$ setzt, die sämmtlichen Differentiale und Integrale ebenfalls sehr bequem, nämlich

$$\frac{dX}{dx} = a^{mx}.m\,l\,a;\ \frac{ddX}{dx^2} = a^{mx}.(m\,l\,a)^2 \text{ u. s. w.}$$

und $\int \mathfrak{X} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; $\int.\int \mathfrak{X} dx.dx = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$ u. s. w.

sich ergeben.

§. 28. Zufolge der Reihe (8 in §. 21, wird daher durch die **erste** Wahl erhalten

$$\int a^{mx} dx.x^n = x^n \frac{a^{mx}}{m\,l\,a} - n x^{n-1} \frac{a^{mx}}{(m\,l\,a)^2} + n.n-1.x^{n-2} \frac{a^{mx}}{(m\,l\,a)^3} - \ldots$$

$$\ldots \mp n.n-1.\ldots.n-(r-1) x^{n-r} \frac{a^{mx}}{(m\,l\,a)^r} \pm R.\int a^{mx} d.x^{n-r} \ldots \quad (11$$

indem im rückständigen Integranden

durch $R = \frac{n.n-1.\ldots.n-(r-1).}{(n\,l\,a)^{r+1}}$, nämlich der constante Factor des $r$ten Gliedes bedeutet wird.

Wenn nun $n = r$, also n eine ganze bejahte Zahl ist, so wird der rückständige Integrand mit $d.x^{n-r} = d.x^0 = 0$ völlig wegfallend sich ergeben haben. Die Reihe ist daher mit dem $r$ten Gliede

$\mp n.n-1.\ldots.2.1.\frac{a^{mx}}{(m\,l\,a)^{n+1}}$ beschlossen, und somit

das Integral ganz genau gefunden. Bei jedem andern Werthe des n aber läuft sie ohn' Ende fort, doch mit abnehmenden Potenzen des x, wenn x eine bejahte Zahl ist.

§. 29. Ebenfalls der Reihe (8 gemäſs, wird dagegen durch die zweite obige Wahl erhalten

$$\int x^n dx . a^{mx} = C + a^{mx} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{m\, l a . a^{mx} x^{n+2}}{.n+1.n+2.} + \frac{(m\, l a)^2 a^{mx} x^{n+3}}{.n+1.n+2.n+3.} - \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{(m\, l a)^{r-1} a^{mx} x^{n+r}}{.n+1.n+2.\ldots.n+r.} \pm R . \int x^{n+r} d . a^{mx} \ldots \quad (12$$

wo R wiederum, wie allemal, den constanten Coefficienten des schon hergesetzten $r$ten Gliedes, hier also $R = \mp \frac{(m\, l a)^{r-1}}{.n+1.\ldots.n+r.}$ bedeuten soll.

§. 30. Wenn wir das allgemeine $\int x^n dx . a^{mx}$ auf $\int x^{-n} dx . a x^{mx}$ einschränken: so können wir statt dieser Reihe (12 auch die folgende sehr gewöhnliche Form aufführen

$$\int \frac{dx}{x^n} a^{mx} = C - \frac{a^{mx}}{.n-1.x^{n-1}} - \frac{a^{mx}(m\, l a)^1}{.n-1.n-2.x^{n-2}} - \frac{a^{mx}(m\, l a)^2}{.n-1.n-2.n-3.x^{n-3}} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{a^{mx}(m\, l a)^{r-1}}{.n-1.n-2.\ldots.n-r.x^{n-r}} + R \int \frac{1}{x^{n-r}} d . a^{mx} \ldots \quad (13$$

Das Integrand $\int x^m (\log x)^n dx$ *als Beispiel für Fall II.*

§. 31. In §. 9 ist bereits eine Reihe (3 für dieses Integrand gefunden. Wollen wir dasselbe auch der obigen Methode des partiellen Integrirens unterwerfen: so können wir leicht überzeugt werden, daſs es dem Iten Falle nicht zugehörig ist.

A) Denn wenn wir erstens $X = (\log x)^n$, folglich $\mathfrak{X} = x^m$ setzen: so wird sich $\frac{dX}{dx} = \frac{n (\log x)^{n-1} d \log x}{dx} = \frac{n (\log) x)^{n-1}}{x}$ ergeben,

und somit schon $\frac{ddX}{dx^2}$ unbequem mehrgliedrig sich ergeben müssen.

Indem nun eben deshalb der IIte Fall dergestalt eintritt, daß in der allgemeinen ihm zugehörigen Reihe (9 $q = 1$, und $q' = x$ zu setzen ist: so hat

$$\text{man } q'\frac{dX}{dx} = x.\frac{n(lx)^{n-1}}{x} = n(lx)^{n-1},$$

$$\text{also } dq'.\frac{ddX}{dx\,dx} = n.n-1.\frac{(lx)^{n-2}}{x};$$ woraus nun schon vor Augen liegt, daß auch $q'' = x$, auch $q''' = x$, und so weiter jedes folgende q ebenfalls $= x$ zu setzen ist.

Dieser dem Differentialquotienten zugefügte Divisor $x = q' = q'' = q'''$ u. s. w. zum Ersatz, dem jedesmaligen Integranden als Multiplicator zugelegt, wird nun,

indem der erste $\int \mathfrak{X}\,dx = \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ist,

den folgenden $\int \frac{1}{x} \int \mathfrak{X}\,dx.dx = \int \frac{x^m}{(m+1)}\,dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$,

den dann

folgenden $\int \frac{1}{x} \int \frac{1}{x} \int \mathfrak{X}\,dx.dx.dx = \int \frac{x^m}{(m+1)^2} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$

geben, u. s. w., nach der allgemeinen Reihe (9 in §. 23. also

$$\int x^m dx.(lx)^n = (lx)^n\frac{x^{m+1}}{m+1} - n(lx)^{n-1}\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + n.n-1.(lx)^{n-2}\frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$$

$$\ldots \mp \frac{n.n-1.\ldots.n-(r-1).}{(m+r)^r}(lx)^{n-r}x^{m+r} \pm R \int x^{m+r}.d(lx)^{n\,r}\ldots \quad (14$$

§. 32.

B) Wenn wir auch zweitens $X = x^m$, folglich $\mathfrak{X} = (\log x)^n$ setzen,

das Integral ganz genau gefunden. Bei jeder ... ᵹbar Werthe des n aber läuft sie ohn' Ende ... mit abnehmenden Potenzen des x, wen' ... ᵹx al- jahte Zahl ist.

Eben so

§. 29. Ebenfalls der Reihe (8 ... gegen durch die zweite obige ...

$$\int x^n dx . a^{mx} = C + a^{mx} \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{m \, l a . a^{mx}}{.n+1} \ldots \text{ u. s. w.}$$

$$\ldots \mp \frac{(m \, l a)^{r-1} a^{mx} x^r}{.n+1 . n+2 . \ldots .}$$

...er IIIte Fall .. s. w. jedes $= x$

wo R wiederum, wie s' ficienten des schon he... Integranden entnomme- also $R = \mp \frac{(m \, l a)^r}{.n+1 . \ldots}$ ... jedesmaligen Differentian-

§. 30. Wen' $\frac{.^{n+1}}{dx} = (m+1) x^m = Q'$,
$\int x^{-n} dx . a x^{mx}$
ser Reihe (1 $Q'' = (m+1)^2 . x^m$, also
Form auffü'...

$$\int \frac{dx}{x^n} a^{mx} = \ldots \quad \frac{d . x Q''}{dx} = (m+1)^3 . x^m \text{ u. s. w. immerfort}$$

bequem gibt: so werden wir hiemit wiederum Reihe (9 in §. 23. erhalten

$$\int (\log x)^n dx . x^m = x^{m+1} . \frac{(l x)^{n+1}}{n+1} - (m+1) x^{m+1} \frac{(l x)^{n+2}}{.n+1 . n+2.}$$

$$+ \frac{(m+1)^2 x^{m+1} (l x)^{n+3}}{.n+1 . n+2 . n+3.} - \ldots \mp \frac{(m+r)^{r-1} x^{m+1} (l x)^{n+r}}{.n+1 . n+2 . \ldots . n+r.}$$

$$\pm R \int (l x)^{n+r} . d . x^{m+1} \ldots + C \ldots \quad (15$$

§. 33. Wollen wir diese allgemeine Formel auf $\int (\log x)^{-n} dx . x^m$ eingeschränkt wissen: so können wir sie auch auf folgende Weise schreiben

$$\int \frac{x^m dx}{(\log x)^n} = C - \frac{x^{m+1}}{(n-1)(l x)^{n-1}} - \frac{(m+1) x^{m+1}}{.n-1 . n-2 . (l x)^{n-2}} - \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{.n-1 . n-2 . n-3 . (l x)^{n-3}},$$

$$\ldots - \frac{(m+1)^{r-1} x^{m+1}}{.n-1 . n-2 . \ldots . n-r . (l x)^{n-r}} + R \int \frac{d . x^{m+1}}{(l x)^{n-r}} \ldots \quad (16$$

...rhin, wie allemal, den constanten Factor
...hergehenden, also des letzten unter den
...n Gliedern bedeutend.

...haben wir (um nunmehr das
...egrand $\int x^m dx (\log x)^n$ vor dem
...dx. a^{mx} zuerst aufzuführen)
...de drei Reihen gefunden,

$$\ldots \frac{-}{1} \cdot \frac{(lx)^{n+2}}{n+1} + \frac{(m+1)^2}{1} \cdot \frac{(lx)^{n+3}}{n+3} + \ldots (3$$

$$\frac{\ldots^{+1}}{m+1} - n(lx)^{n-1} \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + n.n-1.(lx)^{n-2} \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3} \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{n.n-1.\ldots.n-(r-1).}{(m+1)^r} (lx)^{n-r} x^{m+r} \pm R \int x^{m+r} d.(lx)^{n-r} \ldots (14$$

$$15) = x^{m+1}. \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} - \frac{(m+1)x^{m+1}(lx)^{n+2}}{.n+1.n+2.} + \frac{(m+1)^2 x^{m+1}(lx)^{n+3}}{.n+1.n+2.n+3.} - \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{(m+1)^{r-1}.x^{m+1}(lx)^{n+r}}{.n+1.n+2.\ldots.n+r.} \pm R \int (lx)^{n+r} d.x^{m+1} \ldots + C \ldots (15$$

§. 35. Für $\int a^{mx} x^n dx$ sind ebenfalls drei Reihen gefunden,

$$1) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \pm \frac{m\,la}{1} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{(m\,la)^2}{1.2} \cdot \frac{x^{n+3}}{n+3} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(m\,la)^{r-1}}{.1.2.\ldots.r-1.} \cdot \frac{x^{n+r}}{n+r} \ldots (1$$

$$11) = x^n \frac{a^{mx}}{m\,la} - nx^{n-1} \frac{a^{mx}}{(m\,la)^2} + n.n-1.x^{n-2} \frac{a^{mx}}{(m\,la)^3} \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots \mp n.n-1.\ldots.n-(r+1)\,x^{n-r} \frac{a^{mx}}{(m\,la)^r} \pm R \int a^{mx} d.x^{n-r} \ldots (11$$

$$12) = a^{mx} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{(m\,la).a^{mx} x^{n+2}}{.n+1.n+2.} + \frac{(m\,la)^2 a^{mx} x^{n+3}}{.n+1.n+2.n+3.} - \ldots\ldots$$

$$\ldots \mp \frac{(m\,la)^{r-1} a^{mx} x^{n+r}}{.n+1.n+2.\ldots.n+r.} \pm R \int x^{n+r} d.a^{mx} \ldots (12$$

so würde $\int \mathfrak{X}\, dx = \int (\log x)^n dx$ nicht gut integrirbar seyn, wohl aber $\int \frac{(\log x)^n}{x} dx$ als $= \int (\log x)^n d \log x$ allerdings $\mathfrak{S} = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1}$ sehr bequem geben. Eben so bequem wird

ferner $\int \frac{\mathfrak{S}'}{x} dx = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{(lx)^{n+2}}{.n+1.n+2.} = \mathfrak{S}''$ u. s. w.

sich ergeben; daher hier (übrigens) der IIIte Fall dergestalt eintritt, dafs q, q′, q″ u. s. w. jedes $= x$ anzusetzen ist.

Da nun auch dieser den Integranden entnommene Factor x, dagegen dem jedesmaligen Differentianden zugelegt,

uns $\frac{d.xX}{dx} = \frac{d.x^{m+1}}{dx} = (m+1)x^m = Q'$,

auch $\frac{d.xQ'}{dx} = (m+1)^2.x^m$, also

auch $\frac{d.xQ''}{dx} = (m+1)^3.x^m$ u. s. w. immerfort

sehr bequem gibt: so werden wir hiemit wiederum nach Reihe (9 in §. 23. erhalten

$$\int (\log x)^n dx.x^m = x^{m+1}. \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} - (m+1)x^{m+1} \frac{(lx)^{n+2}}{.n+1.n+2.}$$

$$+ \frac{(m+1)^2 x^{m+1} (lx)^{n+3}}{.n+1.n+2.n+3.} - \ldots \mp \frac{(m+r)^{r-1} x^{m+1} (lx)^{n+r}}{.n+1.n+2.\ldots.n+r.}$$

$$\pm R \int (lx)^{n+r}. d.x^{m+1} \ldots + C \ldots \quad (15$$

§. 33. Wollen wir diese allgemeine Formel auf $\int (\log x)^{-n} dx.x^m$ eingeschränkt wissen: so können wir sie auch auf folgende Weise schreiben

$$\int \frac{x^m dx}{(\log x)^n} = C - \frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{.n-1.n-2.(lx)^{n-2}} - \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{.n-1.n-2.n-3.(lx)^{n-3}}.$$

$$\ldots - \frac{(m+1)^{r-1} x^{m+1}}{.n-1.n-2.\ldots.n-r.(lx)^{n-r}} + R \int \frac{d.x^{m+1}}{(lx)^{n-r}} \ldots (16$$

R fernerhin, wie allemal, den constanten Factor des nächstvorhergehenden, also des letzten unter den schon integrirten Gliedern bedeutend.

§. 34. Hiemit haben wir (um nunmehr das blofs logarithmische Integrand $\int x^m dx (\log x)^n$ vor dem andern exponentialen $\int x^n dx . a^{mx}$ zuerst aufzuführen) für $\int x^m dx (\log x)^n$ folgende drei Reihen gefunden,

$$3) = \frac{(l\,x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m+1}{1} \cdot \frac{(l\,x)^{n+2}}{n+1} + \frac{(m+1)^2}{1} \cdot \frac{(l\,x)^{n+3}}{n+3} + \ldots (3$$

$$14) = (l\,x)^n \frac{x^{m+1}}{m+1} - n\,(l\,x)^{n-1} \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + n.n-1.(lx)^{n-2} \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3} \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{n.n-1. \ldots .n-(r-1).}{(m+1)^r} (lx)^{n-r} x^{m+r} \pm R \int x^{m+r} d.(lx)^{n-r} \ldots (14$$

$$15) = x^{m+1} . \frac{(lx)^{n+1}}{.n+1} - \frac{(m+1) x^{m+1} (lx)^{n+2}}{.n+1.n+2.} + \frac{(m+1)^2 x^{m+1} (lx)^{n+3}}{.n+1.n+2.n+3.} - \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{(m+1)^{r-1} . x^{m+1} (l\,x)^{n+r}}{.n+1.n+2. \ldots .n+r.} \pm R \int (lx)^{n+r} d.x^{m+1} \ldots + C \ldots (15$$

§. 35. Für $\int a^{mx} x^n dx$ sind ebenfalls drei Reihen gefunden,

$$1) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \pm \frac{m\,l\,a}{1} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{(m\,l\,a)^2}{1 . 2} \cdot \frac{x^{n+3}}{n+3} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(m\,l\,a)^{r-1}}{.1.2. \ldots .r-1.} \cdot \frac{x^{n+r}}{n+r} \ldots (1$$

$$11) = x^n \frac{a^{mx}}{m\,l\,a} - n x^{n-1} \frac{a^{mx}}{(m\,l\,a)^2} + n.n-1.x^{n-2} \frac{a^{mx}}{(m\,l\,a)^3} \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots \mp n.n-1. \ldots .n-(r+1)\, x^{n-r} \frac{a^{mx}}{(m\,l\,a)^r} \pm R \int a^{mx} d.x^{n-r} \ldots (11$$

$$12) = a^{mx} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{(m\,l\,a) . a^{mx} x^{n+2}}{.n+1.n+2.} + \frac{(m\,l\,a)^2 a^{mx} x^{n+3}}{.n+1.n+2.n+3.} - \ldots\ldots$$

$$\ldots \mp \frac{(m\,l\,a)^{r-1} a^{mx} x^{n+r}}{.n+1.n+2. \ldots .n+r.} \pm R \int x^{n+r} d . a^{mx} \ldots (12$$

§. 36. Für $m = -1$ wird durch die Reihe 3) uns $\int \frac{dx}{x} (\log x)^n = \frac{(l\,x)^{n+1}}{n+1}$ angegeben, wie es ohne dies, wegen $\frac{dx}{x} = d \log x$, und der Hauptregel des algebraischen Integrirens (I. §. 12) schon bekannt ist.

Uebrigens aber möchten die Exponenten m und n gegeben seyn, wie sie wollen, so werden die Reihen 3) und 1) allemal ohn' Ende fortgehend bleiben.

Dagegen werden 14) und 11) abbrechend seyn, und somit ein genaues Integral gewähren, wenn n irgend eine bejahte ganze Zahl ist; und sonst nicht.

§. 37. Ist n irgend eine verneinte Zahl, so wird es wohl allemal das beste seyn, die statt 15) und 17) bereits in §. 33 und 30 gefundenen, und sehr gewöhnlichen Ausdrücke zu gebrauchen, nämlich 16)

$$\int \frac{x^m dx}{(l\,x)^n} = C - \frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} - \frac{(m+1)\,x^{m+1}}{.n-1.n-2.(lx)^{n-2}} - \frac{(m+1)^2\,x^{m+1}}{.n-1.n-2.n-3.(lx)^{n-3}}.$$

$$\ldots - \frac{(m+1)^{r-1}\,x^{m+1}}{.n-1.n-2.\ldots.n-r.(l\,x)^{n-r}} + R.\int \frac{d.x^{m+1}}{(l\,x)^{n-r}} \ldots (16$$

und 13)

$$\int \frac{a^{mx}\,dx}{x^n} = C - \frac{a^{mx}}{.n-1.x^{n-1}} - \frac{a^{mx}(m\,l\,a)^1}{.n-1.n-2.x^{n-2}} - \frac{a^{mx}(m\,l\,a)^2}{.n-1.n-2.n-3.x^{n-3}} \ldots$$

$$\ldots - \frac{a^{mx}(m\,l\,a)^{r-1}}{.n-1.n-2.\ldots.n-r.x^{n-r}} + R\int \frac{1}{x^{n-r}}.\,d.\,a^{mx} \ldots (13$$

§. 38. Wenn in dem Integranden $\int \frac{x^m}{(\log x)^n}$ der Exponent n als irgend eine bejahte ganze Zahl gegeben, und man mit der Entwickelung bis zum $n - r = 1$ gekommen ist, also die beiden letzten

Glieder der Reihe (16

als $-\frac{(m+1)^{n-2}x^{m+1}}{.n-1.n-2,\ldots,2.1.lx}+\frac{(m+1)^{n-2}(m+1)}{.n-1.n-2,\ldots,2.1}\int\frac{x^m}{lx}dx$ erhalten hat: so würde eine weiter getriebene Entwickelung etwas besseres nicht lehren können, als was wir aus §. 9. Reihe (4 schon wissen, daſs nämlich das nunmehr noch rückständige Integrand

$$\int\frac{x^m}{lx}dx = llx+\frac{m+1}{1}.\frac{lx}{1}+\frac{(m+1)^2}{1.2}.\frac{(lx)^2}{2}$$
$$+\frac{(m+1)^3}{1.2.3}.\frac{(lx)^3}{3}+\ldots \text{ ist.}$$

§. 39. Für alle diejenigen Werthe des x, bei welchen diese Reihe eine bequeme summatorische Convergenz gewährt, wird man sie allerdings unmittelbar benutzen können. Wo uns aber diese Berechnung zu unbequem, oder sogar diese Reihe sich divergent ergeben sollte, da wird man zu bedenken haben, daſs $x^{m+1}=z$ gesetzt, uns $x^m dx=\frac{dz}{m+1}$, auch $\log x=\frac{\log z}{m+1}$, und somit $\frac{x^m}{\log x}dx=\frac{dz}{\log z}$ gibt, also auch das rückständige Integrand $\int\frac{x^m}{lx}dx=\int\frac{dz}{\log z}$ geben muſs; so daſs wir nunmehr mit der einfacheren Reihe

$$\int\frac{dz}{\log z}=llz+lz+\frac{(lz)^2}{2.2}+\frac{(lz)^3}{2.3.3}+\frac{(lz)^4}{2.3.4.4}\ldots \quad \text{§. 10 (5}$$

es zu thun haben würden.

§. 40. Seit dem Jahre 1806 aber ist uns diese Reihe, als das Integral $\int\frac{dz}{\log z}$ für so viele Werthe des z in Hrn. **Soldners** logo-logarithmischen **Tafeln** so genau berechnet dargebothen, daſs man nunmehr ein Integral, welches nur noch den rück-

18

ständigen Integranden $\int \frac{dz}{\log z}$ hat, fast für eben so gut gefunden achten kann, als wenn das rückständige Integrand durch die gewöhnlichen logarithmischen oder trigonometrischen Tafeln bestimmbar geworden wäre. Selbst Leonhard Euler, der gröſste Calculator des vorigen Jahrhunderts, und mit ihm die übrigen berühmtesten Lehrer in dieser Sache, hatten an der Ausführbarkeit solcher Tafeln gezweifelt. Diese Zweifel zur deutlichen Würdigung zu bringen, und die Richtigkeit der gelieferten Tafeln auch Anfängern verständlich darzulegen, schien mir keine ganz leichte, und doch so wichtige Sache, daſs ich ihr ein eignes Kapitel, das XVIte gewidmet, und überdies in dem XVten, durch eine deutliche Summirung der dahin gehörigen harmonischen Reihe dazu vorbereitet habe.

§. 41. Wenn in dem andern Integranden $\int \frac{a^{mx}dx}{x^n}$ (§. 37.) der Exponent n ebenfalls als irgend eine bejahte ganze Zahl gegeben, und man mit Entwickelung der dortigen Reihe (13 bis zum $n-r = 1$ gekommen ist, also die beiden letzten Glieder

als $-\frac{a^{mx}(m\,l\,a)^{n-2}}{.n-1.n-2.\ldots.2.1.x} + \frac{(m\,l\,a)^{n-2}}{.n-1.n-2.\ldots.2.1.} \int \frac{d.a^{mx}}{x}$ erhalten hat: so ist

wegen $d.a^{mx} = m\,l\,a.a^{mx}dx$ (§. 5. No. 5.)

auch $= \frac{(m\,l\,a)^{n-1}}{.n-1.n-2.\ldots.2.1.} \int \frac{a^{mx}dx}{x}$ das letzte Glied, mit dem rückständigen Integranden

$$\int \frac{a^{mx}dx}{x} = l\,x + \frac{m\,l\,x}{1}.\frac{x}{1} + \frac{(m\,l\,a)^2}{1.2}.\frac{x^2}{2} + \frac{(m\,l\,a)^3}{1.2.3}.\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$$

(§. 8. (2.)

Für solche Werthe des x, bei welchen diese Reihe eine bequeme Convergenz hat, wird man sich

immerhin noch ihrer bedienen; sonst aber bedenkt man, dafs man, $a^{mx} = z$ gesetzt, auch $m\,x\,\log a = \log z$, also $x = \frac{\log z}{m\,l\,a}$, und $dx = \frac{dz}{z.\,m\,l\,a}$,
also $\int \frac{a^{mx}\,dx}{x} = \int \frac{z.\,dz}{z.\,m\,l\,a} \cdot \frac{m\,l\,a}{\log z} = \int \frac{dz}{\log z}$ hat, und daher auch dieses hier rückständige Integrand vermittelst der eben erwähnten Soldnerischen Tafeln genau genug berechnet erhalten kann.

§. 42. Nunmehr wissen wir also von den beiden Integranden $\int x^m (\log x)^n\,dx$ und $\int a^{mx} x^n\,dx$, dafs sie, wenn ihr Exponent n eine bejahte ganze Zahl ist, sogleich durch die Reihen (14 und (11 genau, das heifst, durch eine endliche Gliederanzahl, bestimmt gefunden werden; wenn aber in diesen ihren Ausdrücken der Exponent n eine verneinte ganze Zahl wäre, dann diese Integranden als $\int \frac{x^m}{(\log x)^n} dx$
und $\int \frac{a^{mx}}{x^n} dx$ (nach §. 37. bis §. 41.) auf das Integrand $\int \frac{dz}{\log z}$ gebracht, und vermittelst der logarithmischen Tafeln genau genug können gefunden werden.

§. 43. Wenn aber in diesen beiden Integranden n weder eine bejahte noch eine verneinte ganze Zahl, sondern irgend ein Bruch ist: so werden wir allgemeine Betrachtungen über den unendlichen Fortgang dieser Reihen am besten auch aus ihren ganz allgemeinen Ausdrücken, für das Integrand $\int x^m (\log x)^n\,dx$, also aus den drei Reihen in §. 34 abnehmen können.

Bei der dortigen ersten, der Reihe 3) ist es ziemlich leicht zu sehen, in welchen Fällen sie eine bequeme Convergenz gewähren möchte. Wenn man

aber in dieser Hinsicht die beiden übrigen in Anspruch nehmen mufs: so ist es zuvörderst allgemein gewifs, dafs jede Fortsetzung dieser Reihen nach ihrem bereits gefundenen $r$ten Gliede, auf der Entwickelung des dabei noch rückständigen Integranden beruht.

Da nun in der Reihe (14 der rückständige Reihentheil

$$\pm R \int x^{m+1} . d\,(lx)^{n-r} = \pm R . n-r . \int x^{m+1} . (\log x)^{n-(r+1)} \frac{dx}{x} .$$
$$= \pm R \int x^m (\log x)^{n-(r+1)} dx ,$$

in der Reihe 15) dagegen der rückständige Reihentheil

$= \pm R \int (lx)^{n+r} d . x^{m+1} = R . m+1 . \int x^m (\log x)^{n+r} dx$ ist, so ist nun leicht zu sehen, dafs man für ein gebrochenes bejahtes n die vorletzte Reihe (14, für ein gebrochenes verneintes n dagegen die letzte Reihe (15 zu ergreifen hat, um durch irgend ein r dahin zu kommen, dafs das rückständige Integrand etwa nach der Reihe 3) entwickelt, eine convergente Reihe gebe.

Eben so kann man für das Integrand $\int a^{mx} x^n dx$ aus den rückständigen Integranden in (11 und (12 (§. 35.) beurtheilen, welche Reihe man zu vergleichen, und bis zu welchem $r$ten Gliede man sie zu befolgen hat, um das rückständige Integrand nach Reihe (1 convergent entwickeln zu können.

§. 44. Hiemit hoffe ich, für die Absichten dieses Lehrbuches hinreichend es dargelegt zu haben, dafs wir im Nothfalle jedes $\int x^m (\log x)^n dx$ und jedes $\int a^{mx} x^n dx$ würden zu integriren wissen; ob es gleich bisweilen etwas mühsame Rechnungen verlangen dürfte. Uebrigens aber müssen wir nicht die Hoffnung aufgeben, für einzele Fälle hie und da noch bequemere Reihen auffinden zu können. So ist es

freilich etwas werth zu wissen, daß man für den Fall einer gegebnen ganzen Zahl n

$$\text{im } \int x^m (\log x)^{-n} dx = \int \frac{x^m}{\log x^n} dx$$

$$\text{und } \int a^{mx} x^{-n} dx = \int \frac{a^{mx}}{x^n} dx,$$ vermittelst der Soldnerischen Tafeln genau genug integriren könne. Allerdings aber ist der Gebrauch dieser Tafeln, wie wir im XVIten Kapitel es sehen werden, bisweilen etwas mühsam, daher ich schon oben gerathen habe, lieber der dortigen Reihen sich zu bedienen, falls sie hinreichend convergent sich beweisen. Wenn wir z. B. für das zweite Integrand nach dessen allgemeiner Reihe so viele r Glieder integrirt haben, bis das gegebne $n = -(r+1)$ geworden, also der rückständige

Integrand $= \mp \frac{(m\,l\,a)^r}{(n+1).n+2 \ldots\ldots 2-1.} \int \frac{dx}{x} a^{mx}$ ist; so mag man, ehe man zu den logologarithmischen Tafeln greift, zuvor prüfen, ob man für diejenigen Werthe des m und x, für welche man das Integral zu wissen nöthig hat, etwa nach der Reihe

$$\int \frac{dx}{x} a^{mx} = C + l\,x + m.\,l\,a.\frac{x}{1} + \frac{(m\,l\,a)^2}{1.2}.\frac{x^2}{2} + \frac{(m\,l\,a)^3}{1.2.2}.\frac{x^3}{3} \ldots \quad (2$$

$$\text{oder } \textit{s} = K + l(mx.\,l\,a) + mx\,l\,a + \frac{(mx\,l\,a)^2}{2.2} + \frac{(mx\,l\,a)^3}{2.3.3} \ldots \quad (6$$

ziemlich leicht zum Ziele kommen könne. Und nun bietet sich hier überdies noch eine andere Reihe dar; nämlich

$$\int \frac{a^{mx}\,dx}{x} = \mathfrak{K} + a^{mx} \left\{ \frac{1}{(xm\,l\,a)} + \frac{1}{(xm\,l\,a)^2} + \frac{1.2}{(xm\,l\,a)^3} + \ldots \right. \quad (17$$

welche bei einigen a, m und x ungemein stark convergirend seyn kann. Man erhält sie aus der Reihe (11, das dortige $n = -1$ gefordert.

Funfzehntes Capitel.

Reihen-Summirung durch Differential- und Integral-Rechnung.

§. 1. Aufgabe.

Die natürliche harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots + \frac{1}{n},$$

n jede bejahte ganze Zahl bedeutend, zu summiren.

Auflösung. Fig. 24.

§. 2. Von A aus seyen die Abscissen, $\underset{\cdots}{\text{A bis }1} = E = 1$; $\underset{\cdots}{\text{A bis }2} = 2$; $\underset{\cdots}{\text{A bis }3} = 3$; $\underset{\cdots}{\text{A bis }4} = 3$ u. s. w. aufgetragen, und in ihren Endpuncten die normalen Ordinaten $E = 1$; $F = \frac{1}{2}$; $G = \frac{1}{3}$; $H = \frac{1}{4}$ u. s. w., überhaupt der Abscisse $= n$ die Ordinate $= \frac{1}{n}$, und der Abscisse $= n+1$ die Ordinate $\frac{1}{n+1}$ zugeordnet, so sind

die Zahlen der Reihe $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots\ \frac{1}{n};\ \frac{1}{n+1}$

als die Linien $1.E;\ \frac{1}{2}E;\ \frac{1}{3}E;\ \ldots\ \frac{1}{n}E;\ \frac{1}{n+1}E$

uns dargestellt, E die beliebig angenommene lineäre Einheit bedeutend.

Ueberdies aber mufs auch in jedem Puncte der Abscissenlinie vom Puncte 1 an, eine Abscisse

$AP = x$ beendigt, und die Ordinate $PQ = y = \frac{1}{x}$ ihr zugeordnet gedacht werden, um durch die Endpuncte dieser y die Curve EQN u. s. w. stetig bestimmt, und somit auch ein Flächendifferential $y\,dx = \frac{1}{x}\,dx$ sich denken zu können, welches mit $dx = 0$ geworden, zu der mit x veränderlichen Endgränze der Fläche 1,BQP geworden sey; also $\int y\,dx = \int \frac{dx}{x} = \int d\log x = \log x$ uns geben müsse, in so weit die Gröfse dieser Fläche von ihrer mit x veränderlichen Endgränze abhängig ist.

Wegen ihrer irgendwo anzunehmenden Anfangsgränze ein constantes Glied C hinzugefügt, haben wir also $\int y\,dx = \log x + C$, und daher $C = 0$, wenn wir den Anfang dieser Fläche in der Linie 1 bis B, dieser Ordinate der Abscisse $x = 1$, hiemit fordern.

Indem es hiemit gewifs ist, dafs durch die Zahl $\log x$, die Fläche 1,BQP ganz genau und vollständig ausgedrückt wird: so ist es eben dadurch gewifs, dafs dieses nur vermittelst einer Flächen-Einheit geschehen kann, welche die Einheit der Flächen-Zahl $\log x$ ausmachen mufs. Diese Einheit ist nun die dem $\log x = \log h = \log 2{,}7182828 \ldots = 1$ zugehörige, zwischen der geraden Linie 1 bis $P' = 1{,}718 \ldots$ und der Curve BQ′ von den Ordinaten E und P′Q′ begränzten Fläche, die daher bei der bereits angenommenen linearen Einheit E, auch dem in der Figur punctirten Quadrate E, E gleich seyn mufs.

Um uns deutlich daran erinnert zu wissen, dafs die logarithmischen Zahlen, die $\log x$, hier Flächen-

grössen andeuten müssen; wollen wir $\int y\,dx = (\log x).EE$ schreiben; wodurch wir dann auch auf die wesentlich beachtungswerthe Frage aufmerksam gemacht werden, wie wir aus solchem Flächen-Integrale auf die Summe

der Linien $1.E + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}E + \frac{1}{4}E \ldots\ldots$

möchten schliessen können!

§. 3. In der That wird dieser Schluss nur dadurch eine anschauliche Deutlichkeit gewinnen können, dass wir uns zuvörderst statt dieser Linien ebenfalls Flächen, und zwar, fernerhin $EE = E.E = E^{\square}$ bedeutend,

die Flächen $1.EE + \frac{1}{2}EE + \frac{1}{3}EE + \frac{1}{4}EE \ldots\ldots$

darstellen; da es dann durch die graphische Darstellung in Fig. 25 vor Augen liegt,

$$\text{dass}\quad 1.EE - {}^1D.EE = (\log 2 - \log 1).EE$$
$$\frac{1}{2}.EE - {}^2D.EE = (\log 3 - \log 2).EE$$
$$\frac{1}{3}.EE - {}^3D.EE = (\log 4 - \log 3).EE$$
$$\frac{1}{4}.EE - {}^4D.EE = (\log 5 - \log 4).EE$$

u. s. w. seyn muss; durch ${}^1D$; ${}^2D$; ${}^3D$; u. s. w. diejenigen Zahlen angedeutet, durch welche, ebenfalls vermittelst der Flächen-Einheit $E.E = E^{\square}$, das erste, das zweite, das dritte krummlinige Dreieck in der Figur ausgedrückt werden müsste.

Eben so nun, wie wir aus den hergesetzten 4 Gleichungen zusammen genommen schliessen können, dass auch in unbenannten

Zahlen $\left\{\begin{matrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ -{}^1D - {}^2D - {}^3D - {}^4D \end{matrix}\right\} = \log 5$, und somit auch $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \log 5 + {}^1D + {}^2D + {}^3D + {}^4D$ seyn mufs; eben so ist es einleuchtend, dafs überhaupt

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} = \log(n+1) + {}^1D + {}^2D + {}^3D \ldots + {}^nD$$

seyn mufs.

§. 4. Wünschen wir statt des $\log(n+1)$ in der rechten Seite, lieber $\log n$ zu haben, so brauchen wir nur zu bedenken, dafs $n+1$ auch $= n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ist, also

$\log(n+1) = \log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, folglich (Diff.R. X. 36)

$$\text{auch} = \log n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} \ldots\ldots,$$

seyn mufs; wodurch wir nun erhalten

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} = \left\{\begin{matrix} \log n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} \ldots \\ + {}^1D + {}^2D + {}^3D \ldots\ldots + {}^nD \end{matrix}\right.$$

§. 5. Für $n = \infty$ wird wegen $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, die Reihe $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{5n^5} - \frac{1}{6n^6} \ldots\ldots\ldots\ldots$ auf das völligste sich vernullen; immerhin aber werden in der Gleichung

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{\infty} = \log \infty + {}^1D + {}^2D + {}^3D \ldots + {}^\infty D$$

neben $\log \infty$ noch die Zahlen der unendlich vielen

Dreiecke vorhanden bleiben, welche, wie wir nachher es erörtern werden, überhaupt die Summe $= 0{,}5772156\ldots$, geben müssen.

§. 6. Durch die graphische Darstellung Fig. 25 ist es anschaulich, wie die unendlich lange Fläche $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{\infty}\right) . EE$ aus zweierlei Flächenräumen besteht; indem der eine $= (\log \infty) . EE$, in der Ordinate $= E$ anfangend, zwischen der unendlichen geraden Linie 1 bis U, und der unendlichen krummen Linie EMU, immer schmäler und schmäler freilich werdend, aber doch überendlich fortlaufend ist. Daſs diese Fläche überendlich groſs sey, würde auch dann uns anschaulich bleiben, wenn wir uns die überendliche Länge der genannten geraden Linie als ein erreichtes Vollgroſs derselben vorzustellen vermöchten, und dann der völligsten Wahrheit gemäſs die Behauptung hinzufügen müſsten, daſs in diesem, vollgroſs entfernten Puncte U der geraden Linie, auch die Curve diese gerade Linie berührend geworden sey.

§. 7. Die zweite Flächengröſse besteht in der Summe der unendlich vielen Dreiecke

$$= {}^{1}D . EE + {}^{2}D . EE + {}^{3}D . EE \ldots + {}^{\infty}D . EE.$$

Von dieser Summe ist es sogleich anschaulich einleuchtend, daſs sie um ein merkliches kleiner als $1 . EE$ seyn muſs. Denn wenn wir uns statt der krummlinigen Hypotenusen, in diesen Dreiecken, zuvörderst ihre Sehnen vorstellen: so ist es einleuchtend, daſs die vollgroſse Summe aller dieser geradlinigen Dreiecke ganz genau $= \frac{E . E}{2} = \frac{1}{2} EE$ ausmachen würde; und nun eben so einleuchtend, daſs die noch übrigen Flächengröſsen zwischen den ge-

radelinigen, und den von uns sogenannten krummlinigen Hypotenusen, bei weiten noch nicht so viel, als die vollgroſse Summe derjenigen geradelinigen Dreiecke belegen kann, welche zu den vorigen Dreiecken hinzugefügt eine vollgroſse Summe von Parallelogrammen, $= 1.E.E$ geben müſste; indem ja $= E$ die Grundlinie eines jeden Parallelogrammes, und ebenfalls $= E$ die Summe ihrer sämmtlichen Höhenlinien seyn würde.

§. 8. Ebenfalls geometrisch anschaulich ist es, daſs vom 10ten geradelinigen Dreiecke an, welches wir durch ${}^{10}\mathfrak{D}.EE$ bezeichnen wollen, die Summe aller noch übrigen,

$$({}^{10}\mathfrak{D} + {}^{11}\mathfrak{D} + {}^{12}\mathfrak{D} \ldots + {}^{\infty}\mathfrak{D}).EE = \frac{1}{10}.EE$$

die Summe $({}^{100}\mathfrak{D} + {}^{101}\mathfrak{D} + {}^{102}\mathfrak{D} \ldots + {}^{\infty}\mathfrak{D}).EE = \frac{1}{100}.EE$

die Summe $({}^{1000}\mathfrak{D} + {}^{1001}\mathfrak{D} \ldots + {}^{\infty}\mathfrak{D}).EE = \frac{1}{1000}.EE$

ganz genau seyn muſs.

Da nun jedes $D.EE - \mathfrak{D}.EE = \mathfrak{F}.EE$ genannt, dieser Flächenraum zwischen der geraden und krummen Hypotenuse allemal beträchtlich kleiner, als das geradlinige Dreieck $\mathfrak{D}.EE$ ist: so ist hiemit auch einleuchtend, daſs die Zahlensumme

$${}^{10}\mathfrak{F} + {}^{11}\mathfrak{F} + {}^{12}\mathfrak{F} \ldots + {}^{\infty}\mathfrak{F} < 0{,}1$$

die Summe ${}^{100}\mathfrak{F} + {}^{101}\mathfrak{F} + {}^{102}\mathfrak{F} \ldots + {}^{\infty}\mathfrak{F} < 0{,}01$

die Summe ${}^{1000}\mathfrak{F} + {}^{1001}\mathfrak{F} + {}^{1002}\mathfrak{F} \ldots + {}^{\infty}\mathfrak{F} < 0{,}001$

u. s. w. seyn muſs.

Gesetzt also, man wäre dessen gewiſs, daſs ${}^{1}D + {}^{2}D + {}^{3}D \ldots + {}^{100000}D = 0{,}577218 \ldots$. gefunden, diese Zahl in ihren ersten Decimalstellen ausgemacht richtige Ziffern hätte; so wäre man eben

dadurch versichert, dafs durch die sämmtlichen übrigen Dreiecke kein Zuwachs für diese Zahl entstehen könne, der mehr als höchstens 0,000009999 .... betrüge, wodurch also auf's höchste nur die 5te Decimalstelle um 1 vergrößsert werden könnte.

§. 9. Eben die Gleichung §. 5.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{\infty} = \log \infty + {}^{1}D + {}^{2}D + {}^{3}D \dots + {}^{\infty}D$$

calculatorisch betrachtet, sind wir nun schon durch Vorerinn. IV. Lehrs. §. 9 gewifs, dafs die linke Seite, indem sie eine zwar gliederconvergente, aber nicht summatorisch convergente Reihe ausmacht, durch eine noch so grofse Zahl nicht abgereicht werden kann; sondern wenn man die Summe der ersten n Glieder

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}$ gefunden hätte, dann die Summe der rückständigen Glieder

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \dots + \frac{1}{n+r}$ bis zu einem angeblichen (n+r)ten hin, schon mehr als $\frac{1}{n}$ sicherlich ausmachen würde.

Da wir nun von der Dreiecksumme in der rechten Seite, durch §. 8 schon dessen gewifs sind, dafs sie ausgemacht kleiner als 1 seyn mufs: so ist dadurch schon so viel gewifs, dafs auch der $\log \infty$ zu grofs seyn mufs, als dafs er durch irgend eine noch so grofse Zahl könnte abgereicht werden.

§. 10. Die ersten Dreiecke sind von beträchtlicher und merklich verschiedener Gröfse; daher z. B. die Summe der 10 ersten, vermittelst der Gleichung

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{10} = \log 11 + {}^{1}D + {}^{2}D + {}^{3}D \dots + {}^{10}D$$

am leichtesten sich dadurch finden läſst, daſs man die 10 ersten Glieder der harmonischen Reihe unmittelbar summirt, und von

$$
\begin{array}{lrl}
\text{ihrer Summe} & = & 2,92896825\ldots \\
\text{den } \log 11 & = & \underline{2,39789827\ldots} \text{ abzieht,} \\
\text{wodurch sich} & & 0,53106998\ldots = {}^{1}D + {}^{2}D + {}^{3}D \ldots + {}^{10}D
\end{array}
$$

ergibt.

§. 11. Da es aber aus der graphischen Darstellung, Fig. 25, einleuchtet, daſs

das Dreieck $^{n}D.EE = \frac{1}{n}EE - [\log(n+1) - \log n].EE$

also die Zahl $^{n}D = \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, also (Diff.R.X.§.36)

$$^{n}D = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} + \frac{1}{6n^6} \ldots \text{ ist:}$$

so muſs von einem gewissen n an, schon $^{n}D < \frac{1}{2nn}$ seyn, folglich auch $^{n+1}D < \frac{1}{2(n+1)^2}$ seyn; daher nun, wenn man sich die Reihe für eine groſse Anzahl von Dreiecken berechnet, und ihren Ertrag bis zur 8ten Decimalstelle hin genau gefunden hätte, dann noch so viele der fernerhin folgenden Dreiecke hinzugefügt, dennoch ihr Zusatz immerfort zu unbeträchtlich seyn würde, um bis in jene 8 ersten Decimalstellen hinein zu reichen. Schon die wenigen ersten 10 Dreiecke berechnet, haben 0,5 für die erste Decimalstelle gegeben; und möchte man nun von den folgenden Dreiecken $^{11}D.EE$; $^{12}D.EE$ u. s. w. noch so viele hinzufügen: so würde doch bei allen diesen Summirungen die erste Decimalziffer 0,5 immerfort dieselbe bleiben.

Euler hat, obgleich durch ganz andere, als die von uns aufgestellten Ansichten, die hieher gehöri-

ge, in vielfacher Hinsicht merkwürdige Zahl 0,5772156649015325 ... bis auf diese 16 Decimalstellen dergestalt berechnet, dass sogar diese 16 Stellen unverändert, immerfort dieselben bleiben würden, wenn man auch noch so viele Dreiecke (um dafür nach meiner obigen anschaulichen Darstellung mich auszudrücken) hinzufügen wollte. Von andern ebenfalls sehr zuverlässigen Calculatoren, vorzüglich dem Hrn. Prof. Rothe, ist die Berechnung noch weiter getrieben.

§. 12. Da wir durchaus und überflüssig zufrieden seyn können, wenn wir bis auf die 8te, oder 7te Decimalstelle genau zu rechnen wissen: so können wir behaupten, dass allemal

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n} = \log(n+1) + 0,57712566 \text{ seyn}$$

muss für jedes n, welches groß genug ist, um durch die ihm zugehörigen ${}^1D + {}^2D + {}^3D \ldots + {}^nD$, für jene 8 Decimalstellen die darin aufgeführten Ziffern schon eingeliefert zu haben.

Für kleinere n aber müsste diese sogenannte constante Zahl gehörig correctirt werden, indem ja nach unsern bisherigen Darstellungen dergleichen Zahl von der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n}$ jedesmaliger Endgränze $\frac{1}{n}$ eigentlich abhängig ist, keinesweges etwa eine durch den constanten Anfang dieser Reihe bestimmliche Integral-Constante ausmacht; von welcher wir vielmehr schon in §. 2. uns versichert haben, dass sie gerade $= 0$, nach unsern obigen Darstellungen, würde seyn müssen.

§. 13. Anders allerdings verhält es sich mit dieser merkwürdigen Zahl 0,5772566 ... nach Eulers

Gange in seiner Calculirung. Nach einer allgemeinen Summirungs-Methode, mit deren schwieriger Darstellung ich die Practiker nicht glaubte belasten zu müssen, hat er aus der harmonischen Reihe

$N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n}$ veränderlicher Endgränze, durch Integrirung

$$\int dN = l\,n + \frac{1}{2n} - \frac{B_1}{2n^2} + \frac{B_2}{4n^4} - \frac{B_3}{6n^6} \ldots\ldots$$

als eine mit n veränderliche Gröfse des N gefunden. Da nun dieser Ausdruck für $n = 1$

schon $= 0 + \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{4} - \frac{B_3}{6} \ldots\ldots$ angeben würde: so mufs man, um für $n = 1$, auch $N = 1$ zu haben, im

$$N = l\,n + \frac{1}{2n} - \frac{B_1}{2n^2} + \frac{B_2}{4n^4} - \frac{B_3}{6n^6} \ldots + \text{Const}$$

diese $\text{Const} = \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2} - \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{6} \ldots$ ansetzen, welche, nach diesem Gange des Eulerischen Calculs, allerdings nun durch die geforderte constante Anfangsgränze 1 des Integrales $\int dN$ bestimmt wird.

§. 14. Lediglich wegen der Divergenz der Bernoullischen Zahlen *)

$$B_1 = \frac{1}{2.3}; \quad B_2 = \frac{1}{5.6}; \quad B_3 = \frac{1}{6.7}; \quad B_4 = \frac{1}{30};$$

---

*) Durch B_1; B_2; und so weiter bezeichne ich die erste, zweite, ... Bernoullische Zahl mit Hrn. Eytelwein in seinen Grundlehren der höhern Analysis, Berlin 1824; da es bekannt ist, mit welcher glücklichen Sorgfalt dieser zuverlässige Lehrer, namentlich auch die rathsamste Charakteristik zu wählen weifs.

$B_5 = \frac{5}{66}$; $B_6 = \frac{691}{2730}$; $B_7 = \frac{7}{6}$; $B_8 = \frac{3617}{510}$; $B_9 = 54{,}973$ u. s. w. kann nun diese Constante unmittelbar durch $n = 1$ gesetzt, sogleich annähernd nicht gefunden werden.

Da aber Euler für $n = 10$ die Gleichung

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{10}=\log 10+\frac{1}{2.10}-\frac{\mathfrak{B}_1}{2.10^2}+\frac{\mathfrak{B}_2}{4.10^4}-\frac{\mathfrak{B}_3}{6.10^6}+-\ldots$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{B}_1}{2}-\frac{\mathfrak{B}_2}{4}+\frac{\mathfrak{B}_3}{6}-+\ldots$$

hat, deren linke Seite, durch unmittelbare Summirung dieser nur 10gliedrigen harmonischen Reihe, leicht zu finden ist, und in der obern Zeile der rechten Seite nunmehr die Glieder wegen der beträchtlich wachsenden Divisoren immer kleiner und kleiner sich ergeben: so kann hiedurch die unterste Zeile der rechten Seite $= 0{,}57721566\ldots$ allerdings gefunden, und als eine von der geforderten Anfangsgränze 1 der Reihe abhängige Integral-Constante gefunden werden.

§. 15. Nach diesem Gange des Eulerischen Calculs ist daher als ganz allgemeine Gleichung

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}=\ln+\frac{1}{2n}-\frac{\mathfrak{B}_1}{2n^2}+\frac{\mathfrak{B}_2}{4n^4}-\frac{\mathfrak{B}_3}{6n^6}\ldots.$$
$$\ldots+0{,}57721566\ldots$$

gefunden, und auch zum Gebrauche unmittelbar dienlich, wenn n eine so grosse Zahl ist, dass, der Bernoullischen divergirenden Zahlen ungeachtet, die Reihe, wegen der stark wachsenden Divisoren, sogleich als eine summatorisch convergirende Reihe sich ergeben muss. Der Beweis für diese summatorische Convergenz ist mir, bei allen darüber vorgefundenen, und selbst versuchten Angriffen, immer so schwierig geblieben, dass ich nicht gerathen

finde, hier dergleichen mitzutheilen; besonders da ich von den Bernoullischen Zahlen einen anderweitigen Gebrauch zu machen nirgend nöthig haben werde. Allerdings würde man von der erwähnten Convergenz sehr allgemein überzeugt seyn müssen, wenn man auf diesem Wege, rein und völlig, von der allgemeinen Richtigkeit der vorigen Gleichung für jeden Werth des n sich überzeugt wissen wollte. Die stärkste Convergenz aber wird man sehr offenbar für den Werthfall $n = \infty$ erhalten, für welchen auf diesem Wege sich die Gleichung

$$♂^{2}) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{\infty} = \log \infty + 0 - 0 + 0 - 0 \dots$$
$$\dots + 0{,}5772156 \text{ ergibt.}$$

§. 16. Durch unsere obige sehr anschauliche Darstellung haben wir, schon in §. 3., die Gleichung ♂)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} = \log(n+1) + {}^{1}D + {}^{2}D + {}^{3}D \dots + {}^{n}D$$

erhalten.

Wenn wir nun nach §. 8 bedenken, daſs jedes nte Dreieck

$${}^{n}D = \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ ist, folglich}$$

$$\text{auch} = \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} + \log n - \log(n+1) \text{ seyn muſs,}$$

$$\text{und demnach } {}^{1}D = 1 + 0 - \log 2$$

$${}^{2}D = \frac{1}{2} + \log 2 - \log 3$$

$${}^{3}D = \frac{1}{3} + \log 3 - \log 4,$$

$$\text{überh. also } {}^{n-1}D = \frac{1}{n-1} + \log(n-1) - \log n$$

$$\text{und } {}^{n}D = \frac{1}{n} + \log n - \log(n+1) \text{ seyn muſs:}$$

so ist uns hiemit die obige Gleichung ♂) sogar als völlig identisch vor Augen gestellt.

§. 17. Als solche identische Gleichung würde sie uns für die Berechnung der harmonischen Reihe irgend eine neue Lehre nicht gewähren können. Wenn wir dann aber vermittelst des Satzes, §. 8., daſs jedes ${}^{n}D < \frac{1}{2nn}$ seyn muſs, uns überzeugt haben, daſs es eine Zahl $n = r$ gibt, bei welcher die Reihensumme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n} = \log(n+1) + 0{,}5772156 \dots$$

dergestalt sich ergeben muſs, daſs durch jeden noch gröſsern Werth des n, für diese Zahl in diesen ihren 8 ersten Decimalstellen irgend eine Veränderung nicht erfolgen könnte, auch die Veränderungen, welche durch vergröſserte n, in den übrigen Decimalstellen allerdings erfolgen würden, immerfort kleiner und kleiner mit gröſseren n sich ergeben müſsten; so sind wir dann sehr deutlich überzeugt, daſs wir für jedes $n > r$ die Summe der harmonischen Reihe, vermittelst dieser Gleichung bis auf die 8te Decimalstelle richtig müssen finden können, um so mehr also auch für $n = \infty$ allerdings die Gleichung

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{\infty} = \log(\infty + 1) + 0{,}5772156 \dots$$

und nach §. 4 auch $= \log \infty + 0{,}5772156 \dots$ bis auf die 8te Dicimalstelle ausgemacht richtig seyn muſs.

§. 18. Die Gröſse des erwähnten r (oder auch eines kleineren r, wenn man mit einem geringeren Grade der Richtigkeit zufrieden seyn will) wirklich zu finden, ist bei weiten nicht so schwierig, als die in §. 15 erwähnte Convergenz beim Gebrauche

der Bernoullischen Zahlen zu erweisen. Indessen will ich auf die wirkliche Ausführung hier keinen Raum verwenden, nachdem ich die dreierlei Absichten dieses Kapitels nunmehr erreicht habe:

1) dem Versprechen in Cap. III. §. 64 gemäfs, an irgend einem Beispiele zu zeigen, wie man die Methode der Differential- und Integralrechnung, welche allemal stetige Gröfsen voraussetzt, auch auf die Summirung nicht stetiger, nur diskreter Zahlgröfsen anwenden kann;

2) mit der merkwürdigen Zahl 0,5772156..., und dem Begriffe ihrer Constantheit, zuvörderst bei den Summirungen der natürlichen harmonischen Reihe bekannt zu machen, denen sie ihre erste Berühmtheit zu danken hat; und

3) werden wir nun die sehr gewöhnlich gewordene Gleichung

$$\log 0 = -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{\infty}\right)+0,5772156\ldots$$

sogleich sehr deutlich erklären können; wodurch es uns dann auch im nächstfolgenden Kapitel sehr einleuchtend werden wird, dafs gerade durch diesen Ausdruck des log 0, auch bei Berechnung der dortigen Integral-Logarithmen, ebenfalls diese Zahl 0,5772156... in Anwendung gekommen ist.

§. 19. In Diff.R. X. §. 19. ist es bereits gelehrt worden, nicht etwa, dafs jeder Logarithme der 0 ein $= -\infty$, eine verneinte unendlich grofse Zahl seyn müsse, wie man nach einigen Lehrbüchern es glauben möchte; sondern dafs in allen solchen Logarithmen-Systemen, deren Basis b gröfser als 1 ist (also allerdings auch in den beiden bereits tabellirten, dem Briggischen und dem natürlichen), der

Logarithmè der o ein $= -\infty$ seyn muſs. Ein Mehres, irgend eine etwanige genauere Angabe dieses $-\infty$ konnte aus den dortigen Gründen unmittelbar nicht gefolgert werden.

Nachdem wir nachher in Diff.R. §. 36. die dortige Reihe für Log(1—U) erhalten hatten, so hätten wir, ihr U = 1 und ihr a = 1 gesetzt, daraus schlieſsen können,

$$\text{daſs } \log 0 = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots - \frac{1}{\infty},$$

also log o durch die Gegensumme der unendlichen natürlichen harmonischen Reihe gegeben werde. Späterhin aber, in Integr.R. IX. §. 16, ist es schon vorläufig erwähnt worden, daſs durch die wirklichen Summirungen dieser Reihe eine genauere Bestimmung des log o sich ergeben werde; die wir nunmehr kurz und deutlich darstellen können.

§. 20. Aus der in §. 15 erwiesenen, in ihrem letzten Gliede bis zur 8ten Decimalstelle richtigen Gleichung

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{\infty} = \log\infty + 0{,}57721566 \ldots,$$

$$\text{folgt, } -\log\infty = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{\infty}\right) + 0{,}57721566 \ldots$$

$$\text{Da nun } -\log\infty = \log\frac{1}{\infty} = \log 0 \text{ seyn muſs:}$$

so würde man auch log o $= -H + N$, ebenfalls bis zur 8ten, oder doch 7ten Decimalstelle richtig haben, wenn man, die Summe der harmonischen Reihe (durch H angedeutet) vollkommen richtig, oder doch vermittelst der ersten 8 Decimalstellen, in diesen Näherungsweise richtig anzugeben vermöchte; welches aber nicht geschehen kann, weil diese un-

endliche Reihe zwar gliederconvergent, aber nicht summatorisch convergent ist.

§. 21. Indem wir von diesem H bereits wissen, daſs es eine überendliche, durch keine noch so groſse Zahl abzureichende Gröſse ist, von der Zahl N = 0,577 .... aber ebenfalls deutlich überzeugt sind, daſs sie einer endlichen Gröſse näher und näher zu kommen weiſs, welche zuvörderst gröſser als 0,5, aber kleiner als 0,6; gröſser als 0,57, aber kleiner als 0,58 in ihrer Wirklichkeit als stetige Gröſse seyn muſs, durch den diskreten Zahlenmaſsstab aber nicht genau erreichbar ist; so bleibt es allerdings dabei, daſs auch nach der Gleichung

$$\log 0 = -H + N$$

dieser natürliche Logarithme der 0 durch eine noch so groſse verneinte Zahl nicht erreichbar ist, sondern immerfort unangeblich bleibt, indem ja ein unendlich Groſses, auch nachdem nur etwas endlich Groſses von ihm abgegangen ist, immer noch überendlichgroſs bleiben muſs.

§. 22. Indessen ist es bei einigen calculatorischen Verbindungen etwas werth, es deutlich zu wissen, daſs der log 0 neben dem unendlich groſsen — H auch das endliche N schon in sich hat. Durch die neue Methode im XXVten Cap. d. Diff.R. haben wir es an mehren Beispielen dargethan, daſs die endlichen Gröſsen, welche man als Resultat aus mehren unendlichen Gröſsen durch andere Methoden allerdings auch gefunden, aber für eine Differenz zwischen unendlichen Gröſsen geachtet hätte, dieses eigentlich nicht waren, indem die unendlichen Gröſsen, als solche, vielmehr einander vernullen muſsten, und etwas endliches nur übrig lassen konnten,

weil sie selbst schon an sich nicht rein unendlich waren, sondern etwas endliches mit an sich hatten.

§. 23. Auch bei der vorhin gebrauchten Reihe

$$\log(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} \ldots\ldots$$

findet die im XXVten Kapitel gemachte Bemerkung statt, daſs durch ein plötzliches $u = 1$ setzen, nur das unendlich Groſse im Werthe des $\log(1-1) = \log 0$ könne gefunden werden; und so dürfte auch hier die Frage entstehen, wie man vielleicht vermittelst einer allmähligen Annäherung, nach der dortigen Methode, die endliche Gröſse N möchte auffinden können! Indessen finde ich nicht nöthig, mich hier damit zu verweilen. Nur muſs ich doch erinnern, daſs man durch diese Methode nicht gerade nothwendig auf $\log 0 = -H + N$ zu treffen erwarten muſs, sondern sich statt der H gar mancherlei andere unendliche Reihe, und neben ihr statt der N eine andere endliche Gröſse ergeben kann.

Sechszehntes Capitel.

Erklärung der Soldnerischen Integral-Logarithmen.

§. 1. Zur Berechnung des Integrales $\int\frac{du}{lu}$ für bejahte u (bei negativen würde sogleich lu unmöglich seyn) dienen folgende Sätze, die wir nach und nach erweisen werden.

I) Für jedes u **nicht** grösser als 1 gibt dieses Integral, von u = 0 anfangend, einen **negativen** Ertrag

$$= l(-lu) + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} + \frac{(lu)^4}{2.3.4.4} + \ldots + K,$$

die Constante $K = -[l(-l0) + l0 + \frac{(l0)^2}{2.2} + \ldots]$

$= +0{,}5772156\ldots$ bedeutend.

II) Für jedes u **nicht kleiner** als 1 muss $\int\frac{du}{lu}$, vom u = 1 anfangend, den **bejahten** Ertrag $= llu + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} + \frac{(lu)^4}{2.3.4.4} \ldots + C$ geben, diese Constante $C = -[ll1 + l1 + \frac{(l1)^2}{2.2} + \ldots] = -l0$,

also $= -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{\infty}) + 0{,}5772156\ldots$ gefordert. (XV. §. 20.)

III) Für jedes u > 1 muss der Ertrag des $\int\frac{du}{lu}$, sogleich mit u = 0 anfangend,

$$= llu + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} + \ldots + 0{,}5772156\ldots$$

seyn; für einige dieser u noch verneint, wegen I); für alle dann noch übrigen gröſseren u aber, immerfort bejaht.

§. 2. Die IIte Anwendung des $\int \frac{du}{lu}$ mit ihrer eigenthümlichen Anfangsgränze und davon abhängigen Constante C, habe ich eingeschaltet, weil uns eben dadurch das richtige Zusammentreffen der Iten und IIIten Anwendung sammt ihrer gemeinschaftlichen Constante $K = 0{,}5772156\ldots$ vermittelst der nachfolgenden graphischen Darstellung auf das deutlichste vor Augen gelegt werden kann; wobei es auch sehr anschaulich sich ergeben wird, wie nothwandig es auch hier ist, zwischen einer -0 und $+0$ gehörig zu unterscheiden. Wäre unser groſser Lehrer, Leonh. Euler, dieser Unterscheidung sich deutlich bewuſst gewesen, so dürfte von ihm die durchgreifende Berechnung dieses Integrales nicht für unmöglich erklärt seyn. Herr Soldner hat das Verdienst, diese Möglichkeit durch ihre Wirklichkeit dargethan zu haben; wozu aber auf den von ihm ergriffenen Umwegen viel Gewandtheit in dem Calcul nöthig war. Nach ihm haben einige andere berühmte Mathematiker andere, ihrer Hoffnuug nach deutlichere, Erweise versucht. Aus eigener Erfahrung weiſs ich es, wie leicht man, bei Benutzung eines gar zu abstracten Calculs, auf Darstellungen gerathen kann, die während ihrer ersten Auffindung uns befriedigend scheinen, nach einigem Zeitverlaufe aber auch dem Erfinder selbst nicht wieder einleuchten wollen. Ziemlich viel dergleichen Deductionen muſs man gegenwärtig, namentlich vermittelst des Functionen-Calculs, dem Publikum vorgelegt sehen, von denen man nach aller Wahrscheinlichkeit versichern möchte, daſs sie auch von dem Verfasser

selbst, zum zweiten Mahle schwerlich durchdacht werden wollen und können. Meinen hier folgenden Vortrag habe ich mehrmals durchdacht, und deutlich befunden.

§. 3. In der merkwürdigen Schrift, *Theorie et Tables d'une nouvelle Fonction transcendente, par J. Soldner, Munic* 1809, sind die Erträge dieses $\int \frac{du}{lu}$ für $u = \frac{1}{100}$; $u = \frac{2}{100}$ und s. w. nicht nur bis zum $u = \frac{100}{100} = 1$ hin, sondern auch darüber hinaus, bis zum $u = \frac{250}{100}$, in 7 Decimalstellen, und von da an, nach weiteren Stufen, bis zu einem $u = 1280$ aufgeführt; für welchen Werth des u sich $\int \frac{du}{lu} = 217,40761 \ldots$ ergeben hat. Die Ausfertigung dieser Tafeln war nicht nur eine mühsame Arbeit, sondern auch eine solche, welche nur ein einsichtsvoller und gewandter Mathematiker für nützlich anerkennen, und mit schicklicher Genauigkeit durchführen konnte. Diese Tafeln, welche eben so gut, wie die logarithmischen und trigonometrischen, einen besonderen Namen verdienen, werden von einigen die logo-logarithmischen genannt. Hr. Soldner selbst nennt sie Integral-Logarithmen; und würde li. 1280 = 217,40761 schreiben *), um an-

*) Statt li. (*logarithmus integralis*) werde ich lieber 𝔍l schreiben, mit einem deutschen l, weil man die natürlichen Logarithmen dazu gebraucht voraussetzt. Uebrigens ist die Benennung Integral-Logarithme, einleuchtend richtiger, als die in Italien vorgeschlagene, Logologarithme, welche ja, nach den obigen drei Reihen, nur dem ersten Gliede derselben zukommend

zudeuten,

$$\int_{(u=1280)} \frac{du}{lu} = 217{,}40761,$$

dafs nämlich für $u = 1280$, als einen einzelen Werthfall des veränderlichen u, des Integrales $\int\frac{du}{lu}$ Gröfse, bis zur 5ten Decimalstelle berechnet, $= 217{,}40761$ sich ergeben habe, wobei denn auch, zu grofser Bequemlichkeit in der Anwendung, des Integrales $\int\frac{du}{lu}$ Anfangsgränze so genommen ist, dafs $\int_{(u=0)}\frac{du}{lu} = 0$ sich ergeben müfste, welches wir ebenfalls deutlich und anschaulich werden zu erklären suchen.

§. 4. Wenn Hr. Soldner schreibt, dafs bei seinen Tafeln $\mathrm{li}.0 = 0$ gefordert sey: so wird damit bedeutet, dafs in denselben die Erträge des $\int\frac{du}{lu}$ sämmtlich vom $u = 0$ anfangend angegeben seyen; daher wir behaupten können, dafs seine Angaben dieses Integrales, für alle $u < 1$, unserer obigen Iten Formel, und für alle $u > 1$, unserer obigen IIIten Formel gemäfs sich ergeben müssen.

Um nun meinen analytischen Erweis dieser Iten und IIIten Formel, vermittelst der dazu nöthigen IIten Formel, auch Anfängern deutlich und anschaulich darzulegen, mufs ich die schon erwähnte graphische Darstellung voranschicken, und etwas genauer, als es von Hrn. Soldner geschehen ist, zu erklären suchen.

---

seyn würde. Indessen wird es immerhin erlaubt seyn, bisweilen auch Logologarithmen oder Soldnerische Logarithmen zu sagen.

Graphische Darstellung des Integrales $\int \frac{du}{lu}$. Fig. 26.

§. 5. Man setze $\int \frac{1}{lu} du = \int y\,du$, und jedes $y = \frac{1}{lu}$, als rechtwinkliche Ordinate, der Abscisse $AP = u$ zugeordnet: so wird die durch solche Abscissen und Ordinaten bestimmte Flächen-Figur APMA für alle $u < (1 = AE)$ eine algebraisch verneint geflächte Ebne seyn; weil von ihren beiden Dimensionen die einen, der bejahten Abscissenrichtung gemäſs gerichtet sind, wenn die Fläche APMA in A anfangend und nach P zu wachsend gedacht wird, die andern Dimensionen aber sämmtlich der verneinten Ordinatenrichtung gemäſs gerichtet sind; indem ja alle $y = \frac{1}{lu}$ für $u < 1$ eine $(-)\,y = \frac{1}{(-)\,lu}$ ausmachen, das heiſst, wegen der verneinten Gröſsen dieser $\log u$, lauter verneint gerichtete y seyn müssen.

Da man aber durch das Gesetz der Stetigkeit berechtigt ist, mit diesen $u < 1$ auch $u = 1 = AE$ selbst noch abgereicht zu fordern: so muſs auch $l1 = o$, als eine Gränze jener sämmtlich verneinten Logarithmen, nothwendig noch als eine $-o$ betrachtet werden; daher für dieses $l1 = -o$ sich die Abscisse $y = \frac{1}{-o} = -\infty = EU$ ergeben muſs.

§. 6. Wenn wir es vermöchten, uns diese immerfort länger und länger werdende $EU = -\infty$ als eine vollgroſse Linie $EU = -\infty$ wirklich er-

füllt vorzustellen: so würden wir auch anschaulich es durchsehen, daſs die Curve A M U, indem sie der E U immerfort näher und näher gekommen ist, zugleich derselben parallel geworden, dieselbe berührend treffen muſs; schneidend durchaus nicht: weil es ja hinter diesem gemeinschaftlichen Berührungspuncte ein ferneres Jenseits nicht geben kann, nachdem die E U in diesem Berührungspuncte schon vollgroſs geworden gefordert seyn muſs.

In der That können wir durch diesen unsern wörtlichen Ausdruck dieser geometrisch geforderten Vorstellung schon im Voraus uns überzeugt wissen, daſs die, längs E U $= -\infty$ unendlich schmäler und schmäler werdende Fläche, eben deſshalb, weil erst im erfüllten Vollgroſs der E U, ihre Breite $= 0$ geworden seyn müſste, selbst auch eine unendlich groſse verneinte Flächengröſse allerdings seyn muſs. (Diese Ueberzeugung wird besonders auch dadurch erläutert und bekräftigt, daſs eine vollgroſse Linie, selbst auch, wenn die zweite über ihr verbreitete Dimension durchaus und völlig $= 0$ ist, dennoch einer endlichen Flächengröſse, analytisch gleich zu achten seyn kann; Vorerinner. IX. §. 11. Und wenn wir nach unserer VIten Vorerinnerung eingedenk bleiben, daſs jede durch zwei Factoren erzeugte arithmetische Gröſse, geometrisch als eine Flächengröſse von zwei Dimensionen zu betrachten ist: so werden wir überhaupt in vielen Fällen von ihrer unendlichen Groſsheit überzeugt seyn, über welche selbst auch Hr. *Soldner* nach S 8 a. a. O. nur durch Beihülfe seiner analytischen Formeln, nicht aber, wie es dort hätte geschehen sollen, durch die graphische Darstellung selbst schon gewiſs geworden zu seyn scheint.) Zugleich aber ist nun auch die Frage aufzuwerfen, ob wir nicht

über die unendliche Grofsheit dieser Fläche AEUMA, da uns das Gesetz ihrer unendlichen Verschmälerung längs EU gegeben ist, eben deshalb auch noch etwas genaueres sollten bestimmen können, als dafs sie überhauft ein $= -\infty$ sey! Und in der That wird sich ergeben,

$$\text{dafs sie} = -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{\infty}\right)+2\,.\,0{,}57721566\ldots$$

also eine Differenz zwischen der unendlich grofsen verneinten Parenthese und der bejahten Gröfse $2\,.\,0{,}57721566\ldots$ ausmachen, nach XV. §. 20. also auch $= \log 0 + 0{,}57721566\ldots$ seyn mufs. Dieses zu wissen wird uns nöthig und nützlich seyn, auch wenn wir den unendlich grofsen Ertrag der parenthesirten natürlichen harmonischen Reihe näher zu bestimmen, dahin gestellt seyn lassen wollten, aufser dafs wir sogleich als augenfällig behaupten könnten, dafs sie an absoluter Gröfse das bejahte $2{,}0{,}57721566\ldots$ übertreffend seyn müsse.

§. 7. Für jedes u **nicht gröfser** als 1, mufsten sich die verneinten Ordinaten $(-)y = \frac{1}{(-)\,l\,u}$ ergeben. Da hingegen jedes $y = \frac{1}{l\,u}$ für $u > 1$ einen bejahten $l\,u$ hat: so mufs das hieher als Anfangsgränze der bejahten $l\,u$ gehörige $l\,1 = 0$ auch als ein $= +0$ betrachtet werden, und daher das diesem $u = 1$ zugehörige $y = \frac{1}{+0} = +\infty = EO$ seyn *). Und die für alle $A\mathfrak{P} > 1$, im unendlich entfernten O anfangende, längs $u = +\infty = ER$ sich erstrek-

---

*) Welches daher von Hrn. Soldner in der graphischen Darstellung, als solches, nicht sogleich durch $1, M^{-\infty}$ hätte sollen bezeichnet werden.

kende Curve O𝔐R mufs sowol die vollgrofse EO, als auch die vollgrofse ER asymptotisch berührend werden, also wegen ihres Anfangens nicht nur, sondern auch wegen ihres Endens, eine bejaht unendlich grofse Fläche EO𝔐RE begränzen. Denn indem, bei der ebenfalls bejahten Abscissenrichtung, nunmehr für alle $u > 1$ auch bejahte Ordinaten $y = \frac{1}{lu}$ sich ergeben: so mufs von EO an der ganze übrige Ertrag des Integrales $\int\frac{du}{lu}$ durch eine bejaht geflächte Ebne $\int y\,dx$ dargestellt werden, in der graphischen Darstellung, durch welche die arithmetisch anzugebenden Gröfsen aller Flächen, von einem gemeinschaftlichen $A = 0$ an sollen anschaulich gerechtfertigt werden.

Analytische Entwickelung des $\int\frac{du}{lu}$

§. 8. Wenn wir $u = b^x$ setzen, so haben wir $lu = x\,lb$, und $\frac{du}{u} = dx.lb$, folglich

$$du = u\,dx.lb = b^x dx.\frac{x}{x}lb = b^x dx.\frac{lu}{x},$$

also $\frac{du}{lu} = \frac{b^x\,dx}{x}$, folglich $\int\frac{du}{lu} = \int\frac{b^x dx}{x}$.

Da wir nun aus Diff.R. X, §. 33 I) folgern können, dafs $b^x = 1 + x\,lb + \frac{x^2}{2}(lb)^2 + \frac{x^3}{2.3}(lb)^3 + \frac{x^4}{2.3.4}(lb)^4 + \ldots$ seyn mufs, indem, die dortige Subtangente $a = 1$ gesetzt, das dortige $Y = \text{Log}\,b^x$ auf ein $X = \log b^x = x\log b$ eingeschränkt wird: so haben wir auch

$$\frac{b^x}{x}dx = \frac{dx}{x} + dx.\,lb + \frac{x\,dx}{2}(lb)^2 + \frac{x^2}{2.3}(lb)^3 + \frac{x^3}{2.3.3}(lb)^4 \ldots\ldots$$

folglich $\int \frac{du}{lu} = \int \frac{b^x}{x}\,dx =$

$$= lx + x\,lb + \frac{x^2}{2.2}(lb)^2 + \frac{x^3}{2.3.3}(lb)^3 + \frac{x^4\,(lb)^4}{2.3.4.4} \ldots + \text{Const.}$$

§. 9. Irgend eine verneinte Zahl für b angenommen, würde log b unmöglich machen. Für jede bejahte Zahl b aber, sie mag so groſs oder so klein seyn, als sie will, wird dieser Logarithme möglich, und demnach die ganze Reihe möglich sich ergeben, wenn, ihres ersten Gliedes wegen, auch x nur bejaht genommen wird. Bei jedem verneinten x aber, also bei allen $u < 1$, für welche wir doch auch das vorgegebne Integral berechnet wissen wollen, würde das erste Glied der Reihe sich unmöglich ergeben müssen!

§. 10. Dieser Schwierigkeit werden wir uns auf das kürzeste, und mit ihrem Grunde selbst überhoben sehen, wenn wir bedenken, daſs nicht dieses x, sondern u, die Gröſse ausmacht, welche in dem Integranden vorgegeben wird, x dagegen, und auch b, bloſse Hülfsgröſsen sind, die wir zur Erleichterung des Calculs mit herbei genommen haben, und daher auch fernerhin beibehalten, oder austauschen, oder auf einzele Werthe einschränken können, je nachdem wir es dem Zwecke der Aufgabe gemäſs finden.

Da es nun aus dem Begriffe dieser beiden Hülfsgröſsen selbst, nach den ersten Gleichungen des §. 8. vor Augen liegt, daſs $x = \frac{lu}{lb}$ seyn muſs: so sind wir durch die letzte dortige Gleichung auch dessen gewiſs,

dafs $\int \frac{du}{lu} = \int \frac{b^x}{x} dx =$

$= l\frac{lu}{lb} + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} + \frac{(lu)^4}{2.3.4.4} \ldots + \text{Const}$ seyn, und diese Reihe der vorigen, durch x ausgedrückten, congruent, das heifst, in allen ihren einzelen Gliedern ihr gleich seyn mufs.

§. 11. Alle nachfolgenden Glieder in dieser Reihe sind nun für jedes bejahte u durchaus möglich, obgleich sie für jedes $u < 1$ ein $(-)lu$ erhalten, und daher abwechselnd verneint und bejaht auf einander folgen müssen.

Zugleich aber erhellet, dafs man, um auch das erste Glied $l\frac{lu}{lb}$ allemal möglich zu erhalten,

für jedes $u < 1$, also $(-)lu$, auch ein $(-)lb$,
für jedes $u > 1$, also $(+)lu$, auch ein $(+)lb$

haben, also für die $u < 1$ ein $b < 1$, und

dagegen für die $u > 1$ ein $b > 1$ gewählt werden mufs.

§. 12. Unter allen $b < 1$ ist

$b = \frac{1}{h} = \frac{1}{2,7182818\ldots} = 0,4342944 \ldots$ das bequemste, weil wir dann $lb = -lh = -1$ haben; und unter allen $b > 1$ ist $b = h$ das bequemste, da es uns $lb = 1$ gibt.

Diese beiden b wirklich gewählt, haben wir nun

A) $\int \frac{du}{lu} = l(-lu) + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lb)^3}{2.3.3} + \ldots + K$

für alle u, vom $u = 0$ bis zum $u = 1$; dagegen

B) $\int \frac{du}{lu} = llu + lu + \frac{(lu)^2}{1.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} + \ldots + C$

für alle u, vom $u = 1$ bis $u = +\infty$.

§. 13. Da die Formel A) für u = o sich

$$\overset{u=o}{\int}\frac{du}{lu}=l(-lo)+lo+\frac{(lo)^2}{1.2}+\frac{(lo)^3}{2.3.3}+\ldots+K \text{ ergiebt,}$$

so wird, wenn der Ertrag des $\int\frac{du}{lu}$ mit u = o seinen Anfang nehmen soll, die Constante K, als die Gegengröfse dieser auf u = o eingeschränkten Reihe,

$$\text{ein } K=-l(-lo)-lo-\frac{(lo)^2}{2.2}-\frac{(lo)^3}{2.3.3}-\frac{(lo)^4}{2.3.4.4}-\ldots$$

seyn müssen.

§. 14. Wenn wir nun aus XV. §. 20. bedenken, dafs $\log o=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\infty}\right)+0{,}5772156 6\ldots$ ist und dieses $=-H+N$, der Kürze wegen schreiben: so haben wir $-\log o=H-N$, als eine unendlich grofse bejahte Zahl, und daher nach §. 13,

$$K=-\log(H-N)+(H-N)-\frac{(H-N)^2}{2.2}+\frac{(H-N)^3}{2.3.3}-\frac{(H-N)^4}{2.3.4.4}\ldots\ldots$$

woraus erhellet, dafs wir eine schwierige Reihe zu behandeln hätten, wenn wir, aus dem im vorigen §. gebrauchten Werthfalle u = o, die Gröfse der Constante K unmittelbar wollten zu bestimmen suchen.

§. 15. Wollten wir, statt dieses ersten Werthfalles u = o in der Formel A), ihren letzten Werthfall u = 1 benutzen: so hätten wir

$$\overset{(u=1)}{\int}\frac{du}{lu}=l(-l1)+l1+\frac{(l1)^2}{2.2}+\frac{(l1)^3}{2.3.3}+\ldots+K$$

$$=l(+o)-o+o-o\ \ldots\ldots+K;$$

weil das hierin vorkommende $l1$, als der letzte solcher $\log u$, die ein $u<1$ hatten, und daher sämmt-

lich verneint waren, selbst auch ein $\log 1 = -0$ seyn, und daher $-\log 1 = +0$ geben muſs.

Da wir nun durch den Ausdruck des K im vorigen §. davon allerdings überzeugt sind, daſs es eine durchaus mögliche Gröſse seyn muſs: so sind wir nunmehr auch von

der Fläche $\int \frac{du}{l\,u}^{(u=1)} = l\,o + K = -H + N + K$ allerdings überzeugt, daſs sie durchaus möglich seyn muſs. Von ihrem ersten Theile, $l\,o = -H + N$ wissen wir auch, daſs es eine verneint unendlich groſse Fläche seyn muſs. Ihr zweiter Theil aber, die in §. 13. verlangte Integral-Constante K, ist uns noch unbestimmt geblieben.

§. 16. Um dieses merkwürdige K auf eine recht anschauliche Weise bestimmt zu sehen, müssen wir fordern, daſs irgend ein gehöriger Anfangstheil der Fläche, irgend ein

$APM = \int \frac{du}{l\,u}^{\left(u=\frac{1}{m}\right)} = F$, unabhängig von unseren Integrirungen, oder doch unabhängig von ihrer Constante K gefunden sey. Wie dieses geschehen könne, werde ich nachher (§. 39) beibringen. Für jetzt angenommen, daſs auf solche Weise für $u = AP = \frac{1}{2}$ die Fläche $APM = F = -0,3786711\ldots$ in diesen 7 Decimalstellen richtig gefunden sey: so werden wir auch K annähernd richtig durch folgende Schlüsse und Rechnungen zu finden wissen.

§. 17. Für $u = \frac{1}{m}$ haben wir nach Formel A) §. 12. überhaupt

$$\int_{\left(u=\frac{1}{m}\right)} \frac{du}{lu} = l\left(-l\frac{1}{m}\right) + l\frac{1}{m} + \frac{1}{2.2}\left(l\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{1}{2.3.3}\left(l\frac{1}{m}\right)^3 \ldots + K$$

$$= llm - lm + \frac{(lm)^2}{2.2} - \frac{(lm)^3}{2.3.3} + \frac{(lm)^4}{2.3.4.4} - + \ldots + K$$

also

$$K = \left\{ \begin{array}{lcl} \int_{\left(u=\frac{1}{2}\right)} \frac{du}{lu} = F & = & -\ 0{,}3786711 \ldots \\ -\quad ll2 & = & \underline{+\ 0{,}3665223 \ldots} \\ & & -\ 0{,}0121488 \ldots \\ +\quad l2 & = & \underline{+\ 0{,}6931472 \ldots} \\ & & -\ 0{,}6809984 \ldots \\ -\ \frac{(l2)^2}{2.2} & = & \underline{-\ 0{,}120111 \ldots} \\ & & +\ 0{,}560887 \ldots \\ +\ \frac{(l2)^3}{2.3.3} & = & \underline{+\ 0{,}018501 \ldots} \\ & & +\ 0{,}579388 \ldots \\ -\ \frac{(l2)^4}{2.3.4.4} & = & \underline{-\ 0{,}002406 \ldots} \\ & & +\ 0{,}576982 \ldots \\ +\ \frac{(l2)^5}{2.3.4.5.5} & = & \underline{+\ 0{,}000266 \ldots} \\ & & +\ 0{,}577248 \ldots \\ -\ \frac{(l2)^6}{2.3.4.5.6.6} & = & \underline{-\ 0{,}000026 \ldots} \\ & & +\ 0{,}577222 \ldots \end{array} \right.$$

wodurch nun gefunden ist, dafs $K = 0{,}5772 \ldots$ seyn müsse; indem es vor Augen liegt, dafs noch so viele ferneren Glieder der Reihe hinzugefügt, irgend etwas in diesen vier hergesetzten Decimalstellen noch zu ändern nicht vermögen würden. Durch genauere Rechnung würden wir diese Integral-Constante $K = 0{,}5772156 6 \ldots$ dergestalt finden, dafs

alle ferneren noch genaueren Aufsuchungen nur noch die höheren hier fehlenden Decimalstellen betreffen könnten.

§. 18. Eine Integral-Constante ist diese unendliche Zahl K, weil sie dem Integral-Ausdrucke der Formel A), welcher für alle von $u = o$ an bis $u = 1$ hin veränderliche Werthe der u gültig ist, allemal hinzugefügt werden muſs, um die Gröſse der Fläche APM, längs jedem $AP = \frac{1}{m}$ anzugeben; wodurch denn eben in §. 13. sich ergab, daſs

diese $K = -l(-lo) - lo - \frac{(lo)^2}{1.2} - \frac{(lo)^3}{2.3.3} - \ldots$ seyn müsse.

§. 19. Da wir nun durch §. 17. auch versichert sind, daſs dieses K dem N in der Gleichung $lo = -H + N$ (§. 14.) gleich ist: so wissen wir auch, daſs $K = lo + H$ seyn muſs; folglich auch

$$2lo + H = -l(-lo) - \frac{(lo)^2}{2.2} - \frac{(lo)^3}{2.3.3} - \frac{(lo)^4}{2.3.4.4} - \ldots.$$

nach der letzten Gleichung §. 18 seyn muſs.

Und da wir nach §. 15. bereits

$$\overset{(u=1)}{\int} \frac{du}{lu} = \log o + K = -H + N + K \text{ gefunden}$$

haben, so ist uns nunmehr dieser Ertrag der ganzen verneinten unendlich groſsen Fläche AEUMA $= \log o + K$ auch als $= -H + 2N = -H + 2K$ bestimmt gefunden; $H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{\infty}$, die Summe der unendlichen natürlichen harmonischen Reihe bedeutend.

§. 20. Für die noch längeren Flächen, welche längs den $u > 1$ (längs denen u, die länger als $AE = 1$ sind) sich erstrecken, ist es durch §. 12. schon bekannt, daſs sie der dortigen Formel B)

$$\overset{(u>1)}{\int \frac{du}{lu}} = llu + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} + \ldots\ldots + C$$

unterworfen sind. Da nun alle $\overset{(u>1)}{lu}$ sämmtlich bejaht sind, so muſs auch dasjenige $l1 = 0$, welches die Anfangsgränze dieser bejahten lu ausmachen soll, nothwendig ein bejahtes $l1 = +0$ seyn; daher wir hier ebenfalls möglich,

$$\overset{(u=1)}{\int \frac{du}{lu}} = l0 + C, \text{ folglich die Constante } C = -l0$$

haben, wenn der Ausdruck des $\overset{(u>1)}{\int \frac{du}{lu}}$, mit $u = 1$ sich vernullen, also den Ertrag der Fläche, nur von EO anfangend, längs $E\mathfrak{P} = EA + A\mathfrak{P} = -1 + u = u - 1$ angeben soll.

§. 21. Indem wir aber mit Hrn. Soldner auch jedes Integral $\overset{(u>1)}{\int \frac{du}{lu}}$ dergestalt angegeben verlangen, daſs dadurch jedesmal die ganze Fläche AEUMA $+ EO\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ berechnet werde: so müssen wir dem obigen Ausdrucke dieses Integrales, §. 20, auſser seinem unendlich groſsen constanten Theile $C = -l0$ noch die Fläche $AEUMA = -H + 2K = l0 + K$ hinzufügen, wodurch wir also

$$\overset{(u>1)}{\int \frac{du}{lu}} = llu + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} + \ldots + K \text{ erhalten.}$$

§. 22. Da nun alle lu vom $l1 = 0$ an bis zum $\log h = \log 2{,}7182818 = 1$ hin, lauter ächte Brüche sind, so muſs bis dahin das erste Glied llu immerfort eine verneinte Zahl, und anfänglich eine so stark verneinte Zahl seyn, daſs der Ertrag der ganzen Reihe noch eine verneinte Zahl bleiben muſs, obgleich lu sogleich ein ächter bejahter Bruch ist, und jedes folgende Glied $\frac{(lu)^2}{2.2}$, u. s. w. immerfort noch bejahte, doch immerfort kleinere Theile der Reihe hinzufügen muſs.

Für den Werthfall $u = h = 2{,}7182818\ldots$ werden wir $\int\frac{du}{lu}\;(u=h)$

$$= 0 + 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3.3} + \frac{1}{2.3.4.4} \ldots + 0{,}5772156\ldots$$

$= 1{,}8951178\ldots$ erhalten;

und zwischen $u = 1{,}4$ und $u = 1{,}5$ würde diejenige Länge des u fallen, bei welcher $\int\frac{du}{lu} = 0$ sich ergeben müſste. Allem Anscheine nach wird diese Länge jedem Zahlenmaſsstabe incommensurabel, also durch Zahlen nur Näherungsweise angeblich seyn, obgleich sie geometrisch eine ganz genau bestimmte Linie seyn muſs.

§. 23. Ungleich wichtiger ist für uns die Frage, ob wir durch die Reihe

$$\text{I)}\quad \int\frac{du}{lu}\;(u<1) = l(-lu) + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} \ldots + 0{,}577\ldots\ldots$$

den Werth dieses Integrales für jedes u zwischen $= 0$ und $= 1$,

und vermittelst der Reihe

$$(u>1)$$

$$\text{III)}\ \int\frac{du}{lu} = llu + lu + \frac{(lu)^2}{1.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3}\ldots + 0{,}57721\ldots$$

den Werth dieses Integrales für jedes uns nöthige u gröſser als 1, hinreichend genau würden zu berechnen wissen; oder ob für einige dieser Werthe die unmittelbare Berechnung dieser Reihen wegen ihrer anfänglichen Divergenz gar zu mühsam ausfallen würde!

§. 24. Ich sage, wegen ihrer anfänglichen Divergenz! Denn da in beiden Reihen (das erste logologarithmische Glied, als vorangehendes, nicht mitgezählt) ihr ntes und (n+1)tes Glied

ein $\frac{(\log u)^n}{1.2.3,\ldots,n-1\,,n.n}$ und $\frac{(\log u)^{n+1}}{1.2.3,\ldots,(n-1).n.(n+1)^2}$ ist:

so muſs, in absoluter Gröſse, das (n+1)te Glied kleiner als das nte seyn, sobald $\frac{1}{n} > \frac{lu}{(n+1)^2}$,

also $(n+1)^2 > n\,lu$, also $n^2+2n+1 > n\,lu$, um so mehr daher, sobald $n+2 > lu$ ist.

§. 25. In der Formel I) für die $u<1$, ist jedes u ein ächter Bruch, ein $u=\frac{1}{m}$, also $lu = -lm$, also hier die Frage, ob in absoluter Gröſse $n+2 > lm$ sey! Schon vom ersten Gliede an, muſs demnach die Reihe convergente Glieder haben, wenn $lm < 3$, also $m < 20$, also $u > \frac{1}{20}$ gegeben ist.

§. 26. In der Formel III) für alle $u>1$ gehörig, sind alle lu bejaht, und bis zum $lu = lh = l\,2{,}7182828$ hin lauter ächte Brü-

che, dafs also die Reihe für alle u vom $u = 1$ an, bis zum $u = h$ hin, einleuchtend convergent, schon vom ersten Gliede an nicht nur seyn mufs, sondern auch für alle gröſseren u, bis zum $lu < 3$, also namentlich bis zum $u < 20$ hin, ebenfalls schon vom ersten Gliede an sich convergent ergeben mufs.

§. 27. In jeder von diesen beiden Reihen wird es für jedes ihrer u ein solches ntes Glied geben, dafs $n > lu - 2$, also von diesem Gliede an die Reihe gliederconvergent ist. Ob nun aber eine solche, und dann auch jede andere von unseren Reihen $\int\limits^{(u<1)} \frac{du}{lu}$ und $\int\limits^{(u>1)} \frac{du}{lu}$, zuverlässig summatorisch convergent seyn müsse; dieses ist noch eine andere Frage, deren unmittelbarer Angriff durch calculatorische Entwickelung eine mühselige Arbeit ausmachen dürfte. Lieber wollen wir folgenden sehr anschaulichen und lehrreichen Weg einschlagen.

§. 28. In der graphischen Darstellung, Fig. 26, liegt es vor Augen, dafs jede längs $AP = u$ sich erstreckende Ebne $APM = \int \frac{du}{lu} + K$ für jedes u, welches kleiner als $= 1$ gegeben ist, eine Ebne von endlicher Gröſse ausmachend ist, die also auch durch irgend eine summatorisch convergente Reihe Näherungsweihe mufs ausgedrückt werden können.

Da für die sämmtlich verneinten Ordinaten $\frac{1}{lu}$, welche zu den $u < 1$ gehören, ihre Endgränze $\frac{1}{l1} = \frac{1}{0}$, ebenfalls, nach dem Gesetze der Stetigkeit, eine verneinte $\frac{1}{-0} = EU$ seyn mufs, für al-

le $u > 1$ aber lauter bejahte Ordinaten $\frac{1}{lu}$ sich ergeben, so wird, ebenfalls nach dem Gesetze der Stetigkeit, ihre erste Ordinate ein $\frac{1}{(+)l1} = \frac{1}{+0} =$ EO seyn müssen.

Indem wir nun auch bedenken, dafs für alle verneinte Flächen APM, ihre veränderliche Endgränze $PM = \frac{1}{(-)lu}$, ihr Flächen-Differential also $\frac{1}{(-)lu} \cdot (+) du$ ist,

für alle bejahte Flächen EO𝔐𝔓 aber ihre veränderliche Endgränze $𝔓𝔐 = \frac{1}{(+)lu}$, ihr Flächen-Differential also $\frac{1}{(+)lu} \cdot (+) du$ ist; und wir hieraus sehen, dafs für $u = 1$ diese beiden Flächen-Differentiale $\frac{1}{-0} \cdot du$ und $\frac{1}{+0} \cdot du$ zwei Gegengröfsen sind: so läfst sich daraus schon schliefsen, dafs auch in dem Integrand, in welchem diese beiden Gegengröfsen vorkommen, ihre integrirenden Wirkungen sich aufhebend, einander vernullend seyn müssen. Indessen wird es der Mühe werth seyn, durch Betrachtung der hieher gehörenden integrirenden Reihen, dieses 0 der Wirkung deutlich darzulegen.

§ 29. Da wir aus obigem Vortrage es wissen, dafs $K = 0,5772156$ bedeutend, in Fig. 26. für jedes $AP = u < 1$ die Ebne

$$APM = l(-lu) + lu + \frac{lu^2}{2.2} + \frac{lu^3}{2.3.3} \dots + K$$

und $AEU = l0 + K$ ist:

so folgt, die erste Ebne von der andern subtrahirt,

dafs die übrig bleibende

$$\text{PEUM} = lo - l(-lu) - lu - \frac{lu^2}{2.2} - \frac{lu^3}{2.3.3} - \ldots$$

seyn mufs.

§. 30. Da wir nun aus §. 20. ferner wissen, dafs die bejahte Ebne

$$\text{EO}\mathfrak{MP} = -lo + ll(1+\mathfrak{u}) + (1+\mathfrak{u}) + \frac{l(1+\mathfrak{u})^2}{2.2} + \frac{l(1+\mathfrak{u})^3}{2.3.3} + \ldots \text{ seyn mufs,}$$

wenn wir das dortige $u > 1$ hier durch $1 + \mathfrak{u}$ ausdrücken: so wissen wir, dafs in der algebraischen Summe der beiden Flächen PEUM und EO$\mathfrak{MP}$, die beiden ersten Glieder, lo in der ersten, und $-lo$ in der andern Reihe, ganz allgemein einander aufheben, und demnach diese algebraischen Summen PEUM + EO$\mathfrak{MP}$

$$= \begin{cases} -l(-lu) - lu - \frac{(lu)^2}{2.2} - \frac{(lu)^3}{2.3.3} - \frac{(lu)^4}{2.3.4.4} - \ldots \\ +ll(1+\mathfrak{u}) + l(1+\mathfrak{u}) + \frac{l(1+\mathfrak{u})^2}{2.2} + \frac{l(1+\mathfrak{u})^3}{2.3.3} + \frac{l(1+\mathfrak{u})^4}{2.3.4.4} + \ldots \end{cases}$$

ganz allgemein übrig lassen müssen, für jedes $u < 1$, und jedes $1 + \mathfrak{u} > 1$, also für jedes bejahte $\mathfrak{u}$.

§. 31. Eine völlig erlaubte und schickliche Forderung wird es nun hier seyn, zu verlangen, dafs wir uns die AP $= u$ bis zum AE $= 1$ anwachsend, und irgend ein E$\mathfrak{P} = 1 + \mathfrak{u}$ bis zum EE $= 1 + 0 = 1$ abnehmend vorstellen sollen; wobei es denn völlig einleuchtend ist, dafs, während jenes Wachsens und dieses Abnehmens, die Puncte P und $\mathfrak{P}$ als die veränderlichen Endgränzen der beiden Abscissen AP $= u$ und E$\mathfrak{P} = 1 + \mathfrak{u}$ immerfort näher und näher an einander rückend seyn

müssen, und wenn $u = 1$, auch $1 + u = 1 + o = 1$ geworden ist, jene algebraische Summe

$$= \left\{ \begin{array}{l} - lo - o - \frac{o.o}{2.2} - \frac{o.o.o}{2.3.3} - \frac{o.o.o.o}{2.3.4.4} - \ldots\ldots \\ + lo + o + \frac{o.o}{2.2} + \frac{o.o.o}{2.3.3} + \frac{o.o\,o.o}{2.3.4.4} + \ldots\ldots \end{array} \right.$$

also $= o$ geworden seyn muſs.

§. 32. Wenn wir nun mit Hrn. Soldners Tafeln verlangen, uns die sämmtlichen u, vom $u = o$ an bis in die $u = 1 + u$ hinein, stetig fortwachsend zu denken; so wird dem $u = 1$, als dem Uebergangs-Werthe zwischen den $u < 1$ und den $u > 1$, in Hinsicht jener kleineren u, die Ordinate $\frac{1}{-o} = -\infty = EU$, in Hinsicht der gröſseren nachfolgenden $u = 1 + u$ aber, die Ordinate $\frac{1}{+o} = +\infty = EO$ zugehören, also während dieses Durchganges durch $u = 1$ jene verneinte und jene bejahte Unendlichkeit eingetreten seyn, welche auch, wie wir so eben es dargethan haben, in ihren Wirkungen für die integrirenden Reihen der $\int \frac{du}{lu}$, völlig einander vernullend sind.

§. 33. Da unter den $u < 1$ schon $u = 0,99$ das letzte, und unter den $u > 1$ erst $u = 1,1$ das erste ist, wofür Hr. Soldner das Integral $\int \frac{du}{lu}$ berechnet verlangt hat; der Unterschied jenes letzten u von der $u = 1$, als $= 0,01$ durch diese Zahl, der Unterschied dieses ersten u vom $u = 1$, als $= 0,1$, durch diese Zahl genau angeblich ist; so wird es uns da-

durch gewiſs, daſs auch das Integral $\int\limits^{(u=0{,}99)}\frac{du}{lu}$ noch eine solche endliche Gröſse, und auch das Integral $\int\limits^{(u=0{,}1)}\frac{du}{lu}$ schon eine solche endliche Gröſse seyn muſs, die sich auch durch Zahlen, wenigstens Näherungsweise muſs angeben lassen, also summatorisch convergente Reihen dafür vorhanden seyn müssen. Daſs nun aber auch die beiden von uns dafür angegebnen Reihen diese Eigenschaft der summatorischen Convergenz wirklich haben, wird vermittelst des Taylorschen Lehrsatzes am kürzesten erweisbar seyn.

§. 34. Sey $\int\frac{du}{lu} = l(\mp lu) + lu + \frac{(lu)^2}{2.2} + \frac{(lu)^3}{2.3.3} + \ldots + K$ hinreichend genau $= A$ für irgend ein $u = a$ gefunden, für welches sich die Reihe ausgemacht summatorisch convergent schon ergeben hat: so muſs nun nach dem Taylorschen Lehrsatze, $\int\frac{du}{lu} = U$ genannt,

$$\int\limits^{(a+\alpha)}\frac{du}{lu} = A + \overset{(u=a)}{\frac{dU}{du}}\alpha + \overset{(u=a)}{\frac{ddU}{2.du^2}}\alpha^2 + \overset{(u=a)}{\frac{dddU}{2.3.du^3}}\alpha^3 + \ldots \text{ seyn.}$$

Da es sowol unter den u zwischen o und 1, als auch unter denen u, die gröſser als 1 sind, solche $u = a$ gibt, für welche das $\int\limits^{(u=a)}\frac{du}{u} = A$ mit beliebiger Annäherung gefunden werden kann (z. B. $u = \frac{1}{2}$ nach §. 18, und $u = h$ in §. 22); da es ferner durch den bekannten Lehrsatz in Diff.R. XVI. §. 18. schon mit erwiesen ist, daſs man durch ein gehörig klein

gewähltes α die Taylorsche Reihe allemal summatorisch convergent erhalten kann; und da auch in dieser Reihe, das α nicht nur bejaht, sondern auch verneint seyn kann: so werden wir nun allerdings behaupten können, daſs wir vermittelst der Taylorschen Reihe namentlich auch jedes von denen $\int\frac{du}{lu}$, welche in Hrn. Soldners Tafeln aufgeführt sind, würden abzureichen wissen.

§. 35. Wenn Hr. Soldner anführt, daſs für die hier vorhandene Function U die Auffindung der Differentialquotienten gar zu mühsam sey: so ist dagegen von Hrn. Mayer in seiner Integralrechnung §. 145. IV, das Folgegesetz dieser Quotienten ziemlich einfach aufgefunden, und ich glaube fast, diesem achtungswürdigen Lehrer darin beistimmen zu können, daſs andere (etwas schwieriger begründete) Reihen nicht viel schneller zum Ziele führen.

§. 36. Ueber die bequemste Berechnung der Tafeln hier noch vieles anzuführen oder zu versuchen, scheint mir nicht mehr nöthig zu seyn, nachdem sie von Hrn. Soldner schon berechnet, und allem Anschein nach sehr zuverlässig geliefert sind. Sollten wir indessen veranlaſst seyn, bei einer einzelen Angabe der Tafeln von ihrer Richtigkeit durch eigene Prüfung uns überzeugen zu wollen: so wird uns das leichteste Mittel dazu durch unsere obige Verbindung zwischen den graphischen und analytischen Darstellungen an die Hand gegeben seyn.

Denn aus dem Anblicke des Curventheils läſst es sich anschaulich abnehmen, ob die ersten Differenzen zwischen den Integral-Logarithmen in solcher Gegend zu- oder abnehmend, und ob sie dabei mehr oder weniger gleichförmig fortgehend seyn müssen. Aus

unsern obigen analytischen Formeln aber liegt es vor Augen, wie der **Abstand** zwischen zwei Integral-logarithmen, als ein mittlerer Flächentheil, unabhängig von der gemeinschaftlichen Integral-Constante zu finden ist; weil ja diese, durch die Anfangsgränze der Integralfläche bestimmt, für die beiden veränderlichen Endgränzen eines jedes veränderlichen Theiles einerlei bleibt.

§. 37. Gesetzt, ich wünschte Hrn. **Soldners** $\mathfrak{Jl}\ 2,5 = 1,6672946$ zu prüfen, so würde ich nach der Formel für $\mathfrak{n} = \frac{1}{m}$ in §. 17 schliefsen,

dafs $\mathfrak{Jl}\,2 = ll2 + l2 + \frac{(l2)^2}{2.2} + \frac{(l2)^3}{2.3.3} \dots + 0,5772156$

und $\mathfrak{Jl}\,3 = ll3 + l3 + \frac{(l3)^2}{2.2} + \frac{(l3)^3}{2.3.3} \dots + 0,5772156$

folglich

$$\mathfrak{Jl}\,3 - \mathfrak{Jl}\,2 = \left\{\begin{matrix}+ll3\\-ll2\end{matrix}\right. + \left\{\begin{matrix}l3\\-l2\end{matrix}\right. + \frac{1}{4}\left\{\begin{matrix}(l3)^2\\-(l2)^2\end{matrix}\right. + \frac{1}{2.9}\left\{\begin{matrix}(l3)^3\\-(l2)^3\end{matrix}\right. \dots + 0$$

seyn müsse.

Nach ungefährer Berechnung dieser ersten drei Glieder würde sich

$\mathfrak{Jl}\,3 - \mathfrak{Jl}\,2 = 1,11 \dots\dots$ ergeben.

Aus dem hieher gehörigen Theile der Tafeln aber, nämlich

der Zahlen	Integral-Logarithmen	Differenzen
2,0	1,0451638	
		0,6221308
2,5	1,6672946	
		0,4962943
3,0	2,1635889	
		0,8039964
4,0	2,9675853	
		0,6670027
5,0	3,6345880	
		0,5876344
6,0	4,2222224	

dem ich die ersten Differenzen hinzugefügt habe, würde die Differenz

$\mathfrak{Jl}\,3 - \mathfrak{Jl}\,2 = 1,1184251$ seyn.

Wenn nun durch unsere vorige Berechnung nach den beiden Reihen, weit genug dieselbe fortgesetzt, eben diese 7 Decimalstellen sich dafür ergeben hätten; so wären wir dadurch versichert, daſs diese Differenz auch in den Tafeln die richtige sey. Aus dem bloſsen Anschauen der Curve in dieser Gegend würden wir dann ferner überzeugt seyn, daſs der $\mathfrak{Il}\,2,5$ zwar etwas, aber nicht so gar viel

$$\text{gröſser als } \frac{\mathfrak{Il}\,3 - \mathfrak{Il}\,2}{2} = 0,5592125 \text{ seyn müsse.}$$

Sehr genau werden wir nun $\mathfrak{Il}\,2,5$, und durch die leichteste Rechnung finden, wenn wir nach dem Taylorschen Lehrsatze schlieſsen,

$$\text{daſs } \mathfrak{Il}\,2,5 = \mathfrak{Il}\,2 + \frac{dU}{du}.\frac{1}{2} + \frac{ddU}{2du^2}.\frac{1}{4} + \frac{d^3U}{2.3.du^3}.\frac{1}{8} + \ldots$$

$$\text{und auch } \mathfrak{Il}\,2,5 = \mathfrak{Il}\,3 - \frac{dU}{du}.\frac{1}{2} + \frac{ddU}{2du^2}.\frac{1}{4} - \frac{d^3U}{2.3.du^3}.\frac{1}{8} + \ldots$$

seyn muſs, jedes U der ersten Reihe, auch in ihren Differentialquotienten, allemal $= \mathfrak{Il}\,2$, in der zweiten Reihe aber $= \mathfrak{Il}\,3$ angesetzt.

Da nun ferner aus beiden Reihen auch folgt, daſs $\mathfrak{Il}\,2,5$ die Hälfte der algebraischen Summen beider Reihen seyn muſs: so hat man eine sehr convergente Reihe zu benutzen.

Wenn auch jede von den beiden Reihen für sich berechnet, und durch beide Rechnungen einerlei $\mathfrak{Il}\,2,5$ gefunden wird; so wird dadurch ein richtiges Verhalten der beiden $\mathfrak{Il}\,2$ nnd $\mathfrak{Il}\,3$ aufs neue bestätigt.

In so fern hiebei noch die Frage eintreten könnte, ob auch $\mathfrak{Il}\,2$ und $\mathfrak{Il}\,3$ einzeln genommen, in den Tafeln richtig angegeben seyen: so bedenke man aufs neue, daſs man ja jeden mittlern Theil in den dreierlei Flächen I, II, III, nach §. 1, von ihrem

jedesmaligen constanten Anfange unabhängig, finden kann. Wenn man nun in diesen Gegenden eine kleine mittlere Fläche nahe an ihrem Anfange, eine zweite nahe an ihrem Ende nach obigen Reihen berechnet hat, und diese mit denen aus den Angaben der Tafeln folgenden Differenzen übereinstimmen; so kann man versichert seyn, daſs auch in den dazwischen liegenden Angaben der Tafeln kein beträchtlicher Fehler vorkommen könne, dem man nicht durch ihre Differenzen, mit dem Anschauen der Curve verglichen, auf die Spur kommen müſste.

§. 38. Eine dergleichen merkwürdige Differenz würde z. B. die Differenz $\mathfrak{J}l\,0{,}99 - \mathfrak{J}l\,0{,}98$ seyn, weil $ll\,1 = l\,0$ unendlich groſs ist.

Da nun der mittlere Flächentheil längs dem Abscissentheile von $= 0{,}98$ bis $= 0{,}99$ nach der Formel A) §. 12

$$= \left\{ \begin{array}{l} -ll\frac{100}{99} + l\frac{100}{99} - \frac{1}{2.2}\left(l\frac{100}{99}\right)^2 + \frac{1}{2.3.3}\left(l\frac{100}{99}\right)^3 - + \ldots - K \\ +ll\frac{100}{98} - l\frac{100}{98} + \frac{1}{2.2}\left(l\frac{100}{98}\right)^2 - \frac{1}{2.3.3}\left(l\frac{100}{98}\right)^3 + - \ldots + K \end{array} \right.$$

$= +\, 0{,}69791262 - 0{,}01015237 = 0{,}6881346$ sich ergibt, und nach den

Tafeln zwischen $\mathfrak{J}l\,0{,}98 = 3{,}3448241$

und $\mathfrak{J}l\,0{,}99 = \underline{4{,}0329587}$

die Differenz $= 0{,}6881346$ wirklich vorhanden ist: so ist hiemit die Richtigkeit der Differenzen in dieser Gegend hinreichend bestätigt; folglich auch die Richtigkeit der aufgeführten Integral-Logarithmen selbst, wenn die von Hrn. Soldner gebrauchte Integralconstante, 0,57721.... die richtige ist. Herr Soldner hat sie durch ziemlich viele calculatorische Verbindungen gefunden, bei welcher

selbst auch die wichtige Unterscheidung zwischen $-0 = \frac{1}{-\infty}$ (§. 5) und $+0 = \frac{1}{+\infty}$ (§. 7) versteckt geblieben ist, die doch zur deutlichen Unterscheidung unserer beiden Formeln A) und B) (§. 12) wesentlich nöthig war. Nach unserm obigen Vortrage aber werden wir von der Richtigkeit dieser merkwürdigen Constante auf das deutlichste überzeugt seyn, wenn wir die im obigen §. 16 vorausgesetzte unmittelbare Berechnung der Ebne APMA, längs AP $= 0,5$ (Fig. 26) wirklich geleistet haben.

§. 39. In Fig. 27, einer größeren Zeichnung dieser Ebne APM, sey die AP $= 0,5$ in ihre 5 gleichen Theile, und deren erster Theil AB $= \frac{1}{10}$, als $= \frac{10}{100}$, in 10 gleiche Theile zerlegt. Die ersten, auf $\frac{1}{10} = \frac{1}{-\infty} = -0$ folgenden 10 Ordinaten durch a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, und außer $\mathfrak{A} = k$ die vier noch gezeichneten Ordinaten durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ benannt, findet man

$$a = \frac{1}{\lg 0{,}01} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 1} = -\frac{1}{4{,}60517019} = -0{,}2171472$$

$$b = \frac{1}{\lg 0{,}02} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 2} = -\frac{1}{3{,}91202301} = -0{,}2556223$$

$$c = \frac{1}{\lg 0{,}03} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 3} = -\frac{1}{3{,}50655790} = -0{,}2851800$$

$$d = \frac{1}{\lg 0{,}04} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 4} = -\frac{1}{3{,}21887583} = -0{,}3106675$$

$$e = \frac{1}{\lg 0{,}05} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 5} = -\frac{1}{2{,}99573228} = -0{,}3338083$$

$$f = \frac{1}{\lg 0{,}06} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 6} = -\frac{1}{2{,}81341072} = -0{,}3554405$$

$$g = \frac{1}{\lg 0{,}07} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 7} = -\frac{1}{2{,}65926004} = -0{,}3760445$$

$$h = \frac{1}{\lg 0{,}08} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 8} = -\frac{1}{2{,}52572865} = -0{,}3959265$$

$$i = \frac{1}{\lg 0{,}09} = -\frac{1}{\lg 100 - \lg 9} = -\frac{1}{2{,}40794561} = -0{,}4152920$$

$$k = \frac{1}{\lg 0{,}1} = -\frac{1}{\lg 10 - \lg 1} = -\frac{1}{2{,}30258510} = -0{,}4342946$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\lg 0{,}1} = -\frac{1}{\lg 10 - \lg 1} = -\frac{1}{2{,}30258510} = -0{,}4342946$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{\lg 0{,}2} = -\frac{1}{\lg 10 - \lg 2} = -\frac{1}{1{,}60943791} = -0{,}6213353$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{\lg 0{,}3} = -\frac{1}{\lg 10 - \lg 3} = -\frac{1}{1{,}20397280} = -0{,}8305840$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\lg 0{,}4} = -\frac{1}{\lg 10 - \lg 4} = -\frac{1}{0{,}91629073} = -1{,}091357$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\lg 0{,}5} = -\frac{1}{\lg 10 - \lg 5} = -\frac{1}{0{,}69314718} = -1{,}442695$$

Demnach ergeben sich die ersten 9 Parallelogramme als $(a + b + c \ldots\ldots + i) \cdot \frac{1}{100} = -\ 0{,}029451278$

und als $\frac{k - o}{2} \cdot \frac{1}{100} = -\ 0{,}002171073$ die ersten 10 Dreiecke,

also längs $AB = \frac{1}{10}$ die Ebne $= -\ 0{,}031622351$

Ferner die 4 folgenden Parallelogramme

als $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}) \cdot \frac{1}{10} = -0,29775709$

und als $\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{2} \cdot \frac{1}{10} = -0,0504200$ die

4 Dreiecke

also längs BP die Ebne $= -0,34817709$

wodurch wir also für die ganze Ebene APM längs AP $= 0,5$ deren Flächengröſse $= -0,37979944$ gefunden hätten;

welches mit Hrn. Soldners Angabe $= -0,3786711$ (in §. 16) nicht ganz übereinstimmend ist.

Es ist aber auch leicht einzusehen, daſs durch unser Verfahren sogleich das erste Dreieck bei A mit der Grundlinie $\frac{1}{100}$, von uns um ein merkliches zu klein gefunden seyn muſs, da wir statt dessen beträchtlich concaver Hypotenuse Aa nur eine geradlinige angenommen haben. Wenn wir in dieser Hinsicht in diesem ersten Dreiecke schon 15 Ordinaten, und dann dessen 15 kleine Dreiecke, und 14 Parallelogramme berechnen: so wird für dieses erste Dreieck, welches vorhin nur

als $= -\frac{1}{2} \cdot 0,00217147\text{2} = -0,00108573$ eingerechnet war, nunmehr schon $= -0,00179330$ sich ergeben. Herr Soldner hat

es als $\mathfrak{Il}\, 0,01 = -0,0018297$ gefunden; welches mit unserer Berechnung durch die 15 Ordinaten sehr gut sich verträgt; indem durch diese Benutzung derselben immer noch etwas zu kleines sich ergeben muſste.

Wenn wir dagegen die sämmtlichen 15 Ordinaten welche $= - 0,1367385$
$= - 0,1510557$
$= - 0,1609112$
$= - 0,1687215$
$= - 0,1753222$
$= - 0,1811115$
$= - 0,1863130$
$= - 0,1910666$
$= - 0,1954654$
$= - 0,1995755$
$= - 0,2034453$
$= - 0,2071117$
$= - 0,2106025$
$= - 0,2139420$
$= - 0,2171472$ sind, zusammen addiren,

u. die Summe $= - 2,7985298$ durch $\frac{1}{1500}$ multipliciren, so muſs dieses Product $= - 0,00186568$ eine Fläche angeben, die um etwas gröſser als das erste Dreieck seyn muſs; womit nun wiederum Herrn Soldners Angabe $= - 0,0018297$ sehr verträglich ist.

Diese Gewiſsheit, daſs der Integrallogarithme der Zahl 0,01 zwischen $- 0,00179330$
und $- 0,00186568$ fallen muſs, und Herr Soldner $= - 0,0018297$ wirklich dafür gefunden hat, ist allerdings schon hinreichend, in Verbindung mit unsern obigen Integralen uns zu versichern, daſs die Integralconstante in seinen Tafeln die richtige seyn muſs. Da ich indessen im obigen §. 16. absichtlich auf die gröſsere Ebne längs $AP = 0,5$ mich bezogen habe: so mögen noch folgende Rechnungen mit hergesetzt werden.

Wenn wir ferner für jedes von den 4 Trapezien, zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ u. s. w. noch 10 Or-

dinaten interpoliren; so ergiebt sich das erste zwischen 𝔄 und 𝔅 als = — 0,0527370 5
mit Soldners Angabe = — 0,0527367 sehr übereinstimmend, indem hier die krumme Seite des Trapezes beinahe geradlinig ist, und daher unsere Rechnung nur wenig von der Richtigkeit abweichen konnte.

Wir finden ferner das

Trapez zwischen 𝔅 und ℭ, als	=	— 0,07229149
nach Herrn Soldner	=	— 0,0722884
das Trapez zwischen ℭ und 𝔇, als	=	— 0,0955400
nach Herrn Soldner	=	— 0,0955346
das Trapez zwischen 𝔇 und 𝔈, als	=	— 0,12573147
nach Herrn Soldner	=	— 0,1257217

Auch diese Abweichungen zwischen unserer Rechnung und Herrn Soldners Tafeln, sprechen für die Richtigkeit dieser Tafeln, weil in diesen letztern Trapezen die krumme Seite etwas convex gegen die Abscissenlinie ist, und daher unsere Berechnung etwas zu viel angeben mufste.

Diese Rechnungen sind von einem meiner Zuhörer, dem Bergakademisten G u n d e l f i n g e r durchgeführt worden, dessen Zuverlässigkeit mir bekannt ist.

Siebzehntes Capitel.

Moivre's Potenziirungsregel allgemein erwiesen.

§. 1.

Im $d \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{2\,dx}{1-xx}$ (XI. §. 4. No. 5) die $x = \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}$ gesetzt *), gibt uns

$$d \log \frac{1+\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}} = \frac{2\sqrt{-1}\,.\,d \operatorname{tang}\varphi}{1-(\sqrt{-1})^2 \operatorname{tang}\varphi^2} = \frac{2\sqrt{-1}}{1+\operatorname{tang}\varphi^2}\,.\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$$

Da nun wegen $1+\operatorname{tang}\varphi^2 = \sec\varphi^2 = \frac{1}{\cos\varphi^2}$ offenbar $(1+\operatorname{tang}\varphi^2).\cos\varphi^2 = 1$ ist: so muſs das Bogendiffenential $d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,d\log\frac{1+\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}}$ seyn.

Obgleich dieser Ausdruck die unmöglichen Factoren $\sqrt{-1}$ enthält: so werden wir doch bald sehen, daſs wir uns derselben völlig entledigen können.

§. 2. Aus diesen Differentialen pflegt man auf die Integrale, auf die endliche Functionengleichung, $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}}$ zu schlieſsen, und dabei ausdrücklich zu erinnern, daſs, etwa $A+\varphi$ statt φ gesetzt, sich sogleich ergeben würde, daſs die Integralconstante $A = 0$ seyn müsse; weil ja

---

*) In Diff. R. XIII. findet man erörtert, warum hier $\operatorname{tang}\varphi$ durch den unmöglichen Factor $\sqrt{-1}$ multiplicirt werden muſs, wenn es ein trigonometrisch mögliches Differential geben soll. Obgleich übrigens einige von den hier folgenden Lehren dort schon dargestan sind: so will ich doch dieselben aufs neue, von jenen unabhängig hier vortragen.

mit $\varphi = 0$ auch $\operatorname{tang}\varphi = 0$ sich ergebe, und somit durch den letzten Factor der rechten Seite, als $\log\frac{1}{1} = \log 1 = 0$, auch die rechte Seite der Gleichung zugleich mit der linken sich vernullend sey.

Dies alles hat nun allerdings seine Richtigkeit, wenn wir hiermit ein für allemal fordern, daſs jeder bei der folgenden Untersuchung genannte Bogen φ, im Anfangspuncte der Tangentenscale seinen Anfang haben soll.

§. 3. Aus diesem Anfangspuncte der Tangentenscala mag nun ein so genannten bejahter Bogen φ, dergleichen wir allemal auch unter φ schlechthin geschrieben zu verstehen haben, vermittelst der bekannten gewöhnlichen Drehung des Halbmessers 1 beschrieben, seinen Endpunct schon im ersten, oder erst im 2ten, oder 3ten, oder 4ten trigonometrischen Quadranten haben, in welchen Fällen wir ihn durch ein kleines φ andeuten wollen; oder er mag den ganzen Umkreis $= 2\pi$ schon 1 *ſ* oder 2 *ſ*, oder 3mal, u. s. w. überhaupt *g ſ* mal schon durchlaufen, und dann überdies noch eine beliebige Bogenlänge φ, nur daſs sie kleiner als $2\pi = 360$ Gradbogen sey, ebenfalls durchlaufen haben, da wir ihn durch ein groſses Φ schreiben wollen: so ist es allerdings gewiſs, daſs auch für jede dieser Bogenlängen $\Phi = g.2\pi + \varphi$, ein Theil derselben durch den obigen Ausdruck $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1}}$ bestimmt werden muſs; dieser Theil aber schechterdings nur in der Bogenlänge φ bestehen kann, und der vorangehende Theil, $g.2\pi$, als Integralconstante zu behandeln seyn muſs. Daher wir nun auch für jedes Φ allemal darauf zurück kommen würden, daſs

wir zuvörderst $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \tang\varphi\sqrt{-1}}{1 - \tang\varphi\sqrt{-1}}$ zu behandeln haben. (Die verneinten Bogen $-\varphi$, werden wir späterhin beachten.)

§. 4. In der Logarithmik Diff. R. X. §. 36 ist die Reihe

$$\odot)\ \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u} = u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + \ldots\ldots$$

erwiesen, und ihre Convergenz betreffend auch bemerkt, dafs sie für jedes bejahte $y = \frac{1+u}{1-u}$ summatorisch convergent sich ergibt, weil ja für jedes bejahte y ein $u < 1$ erfordert wird. Für jedes $u > 1$ aber werden ihre Angaben mit irgend einer ausgemacht richtigen Lehre im Widerspruch stehen müssen; weil ja für jedes $u > 1$ allemal y eine verneinte Zahl seyn mufs, folglich $\log y$ irgend ein möglicher Logarithme nicht seyn kann.

§. 5. Von den $u < 1$ zu den $u > 1$, macht $u = 1$ den Uebergang aus, dem daher als solchem weder ein bejahter noch ein verneinter Werth des y zugehören kann. Wenn wir uns aber die $u < 1$ bis zum $u = 1$ hin stetig wachsend vorstellen müssen, wie es nicht nur für die Differential- und Integralrechnung wesentlich nothwendig, sondern auch für so manche endliche Reihenbetrachtung, wenn keine Lücken darin bleiben sollen, ebenfalls nöthig ist: so mufs nun der obige Nenner $1 - u = +0$ seyn, falls es der letzte Ertrag für die bis zum $u = 1$ hin angewachsenen u seyn soll, und mufs dagegen $1 - u = 1 - 1 = -0$ seyn, wo diese $u = 1$ den Anfangswerth der $u > 1$ ausmachen soll.

§. 6. Welche unendlich kleine, calculatorisch nicht mefsbare Verschiedenheit zwischen diesen drei-

en $1 - u = 0$ (dem $1 - u = + 0$, dem $1 - u = 0$, und dem $1 - u = - 0$) noch Statt finden möge, braucht hiebei nicht erörtert zu werden, da es hier uns genügt, durch die Unterscheidung $1 - u = + 0$, und $1 - u = - 0$, es deutlich einzusehen, wie bei $u = 1$ die Endgränze der möglichen Logarithmen, als $\log \frac{1+1}{1-1} = \log \frac{1+1}{+0}$, und dann $\log \frac{1+1}{1-1} = \log \frac{1+1}{-0}$ als die Anfangsgränze der unmöglichen Logarithmen für die $u > 1$ unendlich nahe an einander treffen müssen, folglich ihre Entfernung von einander anders als durch die Ziffer 0, calculatorisch angeblich nicht seyn kann.

Wenn man dagegen mit einigen Lehrern behaupten wollte, dafs diese Uebergangs-Null sowol ein $= + 0$, als ein $= - 0$ sey: so würde daraus die ungereimte Behauptung folgern,

dafs $\log \frac{1+1}{+0} = \log \infty$, zugleich auch $\log \frac{1+1}{-0} = \log - \infty$ seyn müsse!

§. 7. Wenn wir die obige Reihe ⊙) erstens auf $u = \text{tang}\,\varphi \sqrt{-1}$ anwenden: so gibt sie uns

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+\text{tg}\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tg}\varphi\sqrt{-1}} = \text{tang}\varphi - \frac{\text{tg}\varphi^3}{3} + \frac{\text{tg}\varphi^5}{5} - \frac{\text{tg}\varphi^7}{7} + - \ldots\ldots$$

Da nun nach §. 1.

auch $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}{1 - \text{tang}\,\varphi\sqrt{-1}}$ ist: so mufs

auch $\varphi = \text{tang}\,\varphi - \frac{\text{tang}\,\varphi^3}{3} + \frac{\text{tang}\,\varphi^5}{5} - \frac{\text{taog}\,\varphi^7}{7} + - \ldots$

seyn.

§. 8. In diesem letzten Ausdrucke der Bogenlänge φ, ist das erste Glied logarithmisch, und mög-

lich nur für jede tang φ von $= 0$ bis $= 1$ hin, diese letzte tang $\varphi = 1$ allerdings noch mit eingeschlossen, weil dafür $1 - \text{tang}\,\varphi = + 0$ ist, also $\pi = 180$ Gradbogen bedeutend

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(\log 2 - \log 0) - 2.\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \ldots\right]$$

gibt.

Der vorige erste Ausdruck des φ (§. 7) allein genommen, und auf tang $\varphi = 1$ angewandt, gibt uns

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \ldots.$$

ohne irgend einen Logarithmen in sich behalten zu haben.

§. 9. Ueberhaupt, für jedes φ, ist dieser erste Ausdruck desselben

$$\text{als } \varphi = \text{tang}\,\varphi - \frac{\text{tang}\,\varphi^3}{3} + \frac{\text{tang}\,\varphi^5}{5} - \frac{\text{tang}\,\varphi^7}{7} + - \ldots$$

obgleich durch Integrirung des logarithmischen

$$d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d \log \frac{1 + \text{tang}\,\varphi \sqrt{-1}}{1 - \text{tang}\,\varphi \sqrt{-1}} \quad \text{nach obigem}$$

Verfahren gewonnen, dennoch von aller Logarithmik unabhängig geworden.

Da aber diese Reihe für jede tang $\varphi > 1$ sich divergent ergibt: so ist bei dieser Function des φ es allerdings der Fall, daſs sie, wegen Divergenz dieser algebraischen Reihe, durch dieselbe nicht bestimmt werden kann, wo sie logarithmisch ausgedrückt, einen unmöglichen Logarithmen verlangen würde.

§. 10. Es ist der Sache werth, hier anzuführen, daſs dieselbe algebraisch ausgedruckte Reihe, auch ohne alle Mithülfe der Logarithmik kann gefunden werden. Denn da x tang φ bedeutend,

$$d\varphi = \frac{1}{1 + xx}\, dx = (1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots)\, dx \text{ ist:}$$

so hat man $\varphi = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + - \ldots + C$ und $C = 0$, wenn das Integral, wie vorhin, mit $x = 0$ seinen Aufang nehmen soll.

Hiemit haben wir also gerade die vorige Reihe erhalten, welche für $x > 1$ durch ihre Divergenz unbrauchbar wird.

Da es aber gewiſs gənug ist, daſs es auch für alle $\tan\varphi > 1$, sogar bis $\tan\varphi = \infty$, immerfort mögliche, diesen Tangenten zugehörige Bogen φ gibt: so muſs die Hoffnung statt finden, auch diese gröſseren φ, aus ihren gegebnen Tangenten, durch eine convergente Reihe bestimmen zu können, welches unter andern auch durch einen gehörigen Gebrauch der Binomialreihe, und zwar hiedurch am kürzesten und deutlichsten, erreicht werden kann.

§. 11. Denn da $\frac{1}{1+xx}$ nicht nur $= (1+xx)^{-1}$ sondern auch $= (xx+1)^{-1}$ seyn muſs; die allgemeine Reihe des $(a+b)^n$ aber, auf $n = 1$ angewandt, uns

$(a+b)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}b^1 + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + a^{-5}b^4 - + \ldots$

gibt: so haben wir

nicht nur $(1+xx)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \ldots$

sondern auch $(xx+1)^{-1} = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + x^{-10} - + \ldots$

indem wir nicht nur $a = 1$ und $b = xx$, sondern statt dessen auch $a = xx$ und $b = 1$ ansetzen können; und so müssen wir $\varphi = \int \frac{1}{1+xx} dx$

1) als $\int(1+xx)^{-1} dx = \int(dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + - \ldots)$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots + C$$

2) als $\int(xx+1)^{-1}dx = \int(x^{-2}dx - x^{-4}dx + x^{-6}dx - x^{-8}dx + - \ldots)$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-5}}{-5} - \frac{x^{-7}}{-7} + - \ldots + K$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - + \ldots + K$$

erhalten, wo nun die erste Reihe für alle x nicht größer als 1, die zweite Reihe für alle x nicht kleiner als 1, convergent ist.

§. 12. In der ersten Reihe ihre Integralconstante $C = 0$ gesetzt, damit uns durch diese Reihe die Bogenlänge φ, von $\varphi = 0$ anfangend, gegeben werde, haben wir

1) $\varphi = \operatorname{tang}\phi - \frac{\operatorname{tg}\varphi^3}{3} + \frac{\operatorname{tg}\varphi^5}{5} - \frac{\operatorname{tg}\varphi^7}{7} + - \ldots$ wie vorhin,

auch $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots$

für jede $\operatorname{tang}\varphi = 1$, noch einleuchtend gliederconvergent. Für jede $\operatorname{tang}\varphi > 1$ dagegen muſs sich diese Reihe divergent ergeben.

Da nun aber die zweite Reihe

2) $\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi} + \frac{1}{3\operatorname{tg}\varphi^3} - \frac{+1}{5\operatorname{tg}\varphi^5} + \frac{1}{7\operatorname{tg}\varphi^7} \ldots + K$

für jede $\operatorname{tang}\varphi < 1$ durch Divergenz unbrauchbar wird: so ist es hiemit sogleich gewiſs, daſs wir für dieses Integral φ

als $\int(xx+1)^{-1}dx = \int(\operatorname{tang}\phi^2 + 1)^{-1} d\operatorname{tang}\varphi$ gefunden, eine noch niedrigere Anfangsgränze, als den Endpunct des für $\operatorname{tang}\varphi = 1$ gehörigen Bogens $\phi = \frac{\pi}{4}$ $= 45°$ durchaus nicht wählen dürfen, wenn wir nicht in eine Integralconstante K verfallen wollen, die wir wegen Divergenz der Reihe, durch welche

sie zufolge dieser Integrirung ausgedrückt werden müſste, nicht würden zu bestimmen wissen.

Sey nun $\varphi = \frac{\pi}{4}$ als die niedrigste Anfangsgränze hier gewählt: so wissen wir, daſs die durch Reihe 2) bestimmte Bogenlänge φ, ein $\varphi = 0$ seyn muſs für tang $\varphi = 1$, und somit durch die Gleichung

$$0 = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + - \ldots + K$$

uns die Constante $K = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots\ldots = \frac{\pi}{4}$ bestimmt wird, aber diese 2te Gleichung nun ausgemacht

$$3)\ \varphi - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} + \frac{1}{3\operatorname{tg}\varphi^3} - \frac{1}{5\operatorname{tg}\varphi^5} + \frac{1}{7\operatorname{tg}\varphi^7} - + \ldots + \frac{\pi}{4}$$

unter der Voraussetzung angibt, daſs fernerhin φ, wie in der Gleichung 1) den g a n z e n zur gegebnen tang φ gehörigen Bogen auch hier bedeuten soll. Da wir nun eben hieraus für den ganzen Bogen φ folgern können, daſs

$$4)\ \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} + \frac{1}{3\operatorname{tg}\varphi^3} - \frac{1}{5\operatorname{tg}\varphi^5} + \frac{1}{7\operatorname{tg}\varphi^7} - + \ldots + \frac{\pi}{4}$$

seyn muſs: so haben wir hiemit eine Gleichung, welche für alle Bogen, die kleiner als $\frac{\pi}{4}$ sind, und somit tang $\varphi < 1$ haben, von einer divergenten Reihe abhängig, und dadurch unbrauchbar wird. Für alle $\varphi > \frac{\pi}{4}$ aber, also für alle tang $\varphi > 1$, ist diese Reihe summatorisch convergent.

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$, also tang $\varphi = 1$, giebt uns diese Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} \ldots + \frac{\pi}{2},$$

welches $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$

wie vorhin, also $\frac{\pi}{4}$ durch eine gliederconvergente und parallel werdende Reihe angegeben vorausgesetzt *).

§. 13. Für die Kreisbogenlänge φ, als Function ihrer trigonometrischen Tangente, $\tang \varphi$, betrachtet, haben wir nun in §. 12. die Gleichung 1) gefunden, welche für alle $\varphi > \frac{\pi}{4}$, wegen ihrer $\tang \varphi > 1$ durch eine divergente Reihe sich ausspricht; und vorher in §. 7. hatten wir für diese Function einen logarithmischen Ausdruck gefunden, welcher für alle $\varphi > \frac{\pi}{4}$ wegen ihrer $\tang \varphi > 1$ einen unmöglichen Logarithmen verlangen muſste.

Selbst für diese einzele Function muſs und kann daraus nicht gefolgert werden, daſs durch die Divergenz der Reihe irgend eine Unmöglichkeit ihres Ertrages erwiesen sey. Was diese divergente Reihe angibt, ist ja einer algebraischen Unmöglichkeit nicht unterworfen, weil die Reihe kein $\sqrt{-1}$ enthält; kann einer logarithmischen Unmöglichkeit nicht unterworfen seyn, da sie durchaus keinen Logarithmen fordert, und auch trigonometrisch möglich ist ja jeder $\tang \varphi > 1$ sogar bis zum $\tang \varphi = \infty$ hin!

Sondern durch die Divergenz einer Reihe werden wir lediglich versichert, daſs von uns durch diese Reihe die wahre Gröſse der abgereiheten Function,

*) Ueber den Parallelismus der Reihen habe ich mich umständlich in Vorerinnerung X. zu erörtern gesucht.

auch nur Näherungsweise nicht, kann gefunden werden; welches aber selbst auch bei gliederconvergenten Reihen der Fall ist, wenn sie nicht zugleich auch summatorisch convergent oder doch parallel werdend sind.

Durch die eben erwähnte logarithmische Unmöglichkeit ist es ebenfalls nur gewiss, dass die gesuchte Grösse des ϕ für alle $\tang \varphi > 1$, in dem dort dafür gefundenen Ausdrucke, einen unmöglichen Logarithmen verlangen muss. Dagegen dürfte sich gar wohl ein anders geformter Ausdruck des φ finden lassen, der für alle $\tang \varphi > 1$ durch mögliche Logarithmen angeblich wäre; womit wir uns indessen nicht aufhalten wollen.

§. 14. Dieses alles habe ich gerade hier den Anfängern über die Reihenausdrüche des φ darlegen wollen, um es nachher deutlich einsehen zu können, dass durch jene Divergenz, oder logarithmische Unmöglichkeit, für die nunmehr folgenden Folgerungen aus der Gleichung ⊙) $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \tang \varphi \sqrt{-1}}{1 - \tang \varphi \sqrt{-1}}$ keine Bedenklichkeit entstehen kann, obgleich dieses Integral (dessen Constante C schon oben §. 2. absichtlich $= 0$ angesetzt wurde, damit die dadurch ausgedrückte Grösse des φ mit $\varphi = 0$ ihren Anfang nehme) nicht nur algebraisch unmöglich scheint, sondern auch, wenn es dieser algebraischen Unmöglichkeit entledigt ist, allerdings für jede $\tang \varphi > 1$ einen unmöglichen Logarithmen verlangt. (§. 6 und 7.)

§. 15. Da

$$\frac{1 + \tang \varphi \sqrt{-1}}{1 - \tang \varphi \sqrt{-1}} \text{ auch } = \frac{\cos \varphi + \cos \varphi . \tang \varphi \sqrt{-1}}{\cos \varphi - \cos \phi . \tang \varphi \sqrt{-1}}$$

seyn, und wegen $\tang \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$,

auch $\cos \phi . \tang \varphi = \sin \phi$ seyn muss: so folgt aus

der Gleichung ⊙) nämlich $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+\operatorname{tg}\varphi\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tg}\varphi\sqrt{-1}}$ (§. 14.) auch die

Gleichung ☽) daſs $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}}$,

seyn muſs.

Da ferner

$$\frac{\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1}} = \frac{(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^2}{\cos\varphi^2+\sin\varphi^2} = (\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})^2$$

ist: so haben wir

auch $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^2$ folglich

$$♀) \text{ auch } \varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}).$$

§. 16. Obgleich die erste Gleichung ⊙) nur von der einen trigonometrischen Linie tang φ, die letzte ♀) dagegen von zweien, cos φ und sin φ abhängig ist: so wird sich doch die letztere für die nun folgenden Behandlungen sehr anstellig beweisen.

Wollten wir die logarithmische Möglichkeit und Unmöglichkeit dieses Ausdruckes sogleich in Frage stellen: so würde darauf zu erwiedern seyn, daſs man auf diese Frage weder ja noch nein, also gar nichts zu antworten vermöge, so lange man den Ausdruck noch mit den algebraisch unmöglichen Factoren $\sqrt{-1}$ behaftet sieht, die man ja eben deshalb für algebraisch unmöglich erklären muſs, weil sie weder bejaht, noch verneint seyn können; uns aber schon durch Diff. R. X. §. 15 erwiesen ist, daſs die logarithmische Möglichkeit und Unmöglichkeit in jedem, namentlich auch in dem natürlichen Systeme, durch die Bejahtheit und Verneintheit der zu logarithmisirenden Gröſse wesentlich und völlig bestimmt wird.

§. 17. Jede von den Bogenlängen, welche dem φ in der

Gleichung ♀) $\Phi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{-1})$

zukommen können, oder zukommen sollen (welche z. B. sämmtlich im Anfangspuncte des ersten trigonometrischen Quadranten ihren Anfang haben, und die Länge des gesammten Umkreises $= 2\pi$ schon deshalb nicht übersteigen dürfen, weil wir oben in §. 2 die Integralconstante $C = 0$ gesetzt haben), jede von diesen Bogenlängen, sie mag so lang oder so kurz seyn, als sie will, muſs allemal als ein $\varphi = n.\psi$ für jede noch so kleine oder noch so groſse, ganze oder gebrochene absolute Zahl n können angesetzt werden, indem es ja für jede Bogenlänge φ eine Bogenlänge $\psi = \frac{\varphi}{n}$ geben muſs, die Zahl n möchte seyn welche sie wollte. Aber nur auf absolute Zahlen n wollen wir absichtlich zuvörderst uns eingeschränkt wissen, um in den uns bevorstehenden Folgerungen nicht ohne deutliche Rechtfertigung auch auf negative n uns auszudehnen.

§. 18. In dieser Allgemeinheit der absoluten Zahl n, das obige $\varphi = n\psi$ gesetzt, nämlich das obige φ als ein nfaches ψ betrachtet, haben wir die Gleichung ♀)

1) als $n\psi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos n\psi + \sin n\psi \sqrt{-1})$ vor Augen.

Da n jede absolute Zahl, also (überdies schon für sich einleuchtend) auch $n = 1$ seyn kann: so hat man

auch $\psi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos\psi + \sin\psi \sqrt{-1})$, folglich

2) auch $n\psi = \frac{n}{\sqrt{-1}} \log(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})$; woraus

3) auch $n\psi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$ durch bekannte Logarithmik sich ergibt.

Aus den beiden Gleichungen 1) und 3) zusammen genommen, folgt nun

4) dafs $\log(\cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1}) = \log(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$ seyn mufs. Und da durch diese Folgerung aus 1) und 3) von dem $n\psi$ ein weiteres nicht verlangt wird, als dafs $n\psi$ in 1) und 3) sich selbst gleich sey, also darauf gar nichts ankommt, ob dieser Bogen $n\psi$ in seinen logarithmischen Ausdrücken mögliche oder unmögliche Logarithmen erfordere: so würde, in Hinsicht des logarithmischen Ausdruckes, diese Gleichung für jede beliebige Gröfse des $n\psi$ richtig bleiben; zu geschweigen, dafs ja aus dieser Gleichung 4) auch die Gleichung der logarithmisirten Gröfsen,

5) $\cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1} = (\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$ folgt, welche gar keinen Logarithmen mehr enthält, also irgend einer Frage nach logarithmischer Möglichkeit oder Unmöglichkeit nicht fernerhin braucht unterworfen zu werden.

§. 19. Dieses ist nun die eine von den berühmten Moivre'schen Gleichungen

$$\cos n\psi \pm \sin n\psi\sqrt{-1} = (\cos\psi \pm \sin\psi\sqrt{-1})^n$$

deren ungemeiner Nutzen für die Analysis der Winkelgröfsen insbesondere durch denjenigen Gebrauch derselben einleuchtend wurde, welchen Euler zur Erfindung seines Winkelcalculs, wie ich in der Kürze ihn nennen möchte, davon zu machen wufste. Gegen seine Begründung dieses Gebrauches, in seiner Abhandlung, *Subsidium calculi sinuum*, *Novi Commentarii Ac. scient. Petrop. Tom. V. ad annum*

1754 *et* 55, hat man erinnert, daſs er jene Gleichungen nur für ganze bejahte n erwiesen, und gleichwol in der Folge auch auf gebrochene n sie angewandt hat. Es wird sich bald ergeben, daſs wir in dieser Hinsicht eine mühselige Erweiterung der Eulerischen Induction, wie sie neuerlich durchgeführt seyn soll, ebenfalls zu ergreifen, nicht nöthig haben. Es ist eben so gewiſs, daſs Euler in der Moivre'schen Gleichung statt ihres bejahten n auch allgemein ein verneintes n anzunehmen für erlaubt gehalten hat, welches doch eines deutlichen Beweises werth ist. Namentlich auch in dieser Hinsicht wird es gerathen seyn, zuvörderst in Frage zu nehmen, für welche Bogen ψ und $n\psi$ die Gleichung 5) Kraft unserer obigen Deduction derselben gültig seyn muſs.

§. 20. Da wir im §. 1. aus einem Ausdrucke des Bogendifferentiales $d\varphi$ zu schlieſsen anfiengen, welches für jede bejahte Bogenlänge φ gültig ist, in dem dafür gefundenen Integral-Ausdrucke des ϕ aber dadurch, daſs wir die Integralconstante $= 0$ ansetzten, diese Bogenlängen keiner andern Einschränkung unterworfen wurden, als daſs sie ihren Anfang in dem Anfangspuncte der Tangentenscala haben müssen, und Falls sie den Umkreis 1 mal oder g mal sollten durchlaufen haben, ihnen statt der Constante $= 0$ die Constante $1 . 360°$ oder $g . 360°$ müſste gegeben werden; die nachher gebrauchte

Gleichung $\tang\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ aber auch zeichen richtig für alle bejahte und verneinte Tangenten, Sinus und Cosinus bleibt: so ist hiemit gewiſs, daſs für alle bejahte $n\psi = \varphi$ vom $n\psi = \varphi = 0$ an bis zum $n\psi = \varphi = 360°$, bis zum $n\psi = 2.360°$, auch bis zum $3.360°$ u. s. w. die obige

5te Gleichung

$$\cos n\psi + \sin n\psi \sqrt{-1} = (\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$$

ihre völlige Gültigkeit haben muss. Denn wenn wir auch wegen der obigen Integralconstante $= 0$, zu vörderst nur behaupten wollen, dass diese Gleichung für alle $n\psi$ vom $= 0$ bis $n\varphi = 1.360^\circ$ erwiesen sey: so kann doch eben daraus gefolgert werden, dass sie auch für alle $n\psi + g.360^\circ$ gelten muss,

weil ja $\cos(n\psi + g.360) = \cos n\psi$,

und auch $\sin(n\psi + g.360) = \sin n\psi$ bleibt.

§. 21. Aus dieser 5ten Gleichung aber hat nun Euler in der ersten Eröffnung dieser Lehren in seiner schon erwähnten Abhandlung, *Subsidium calculi sinuum*, eine

6te Gleichung $\cos n\psi - \sin n\psi \sqrt{-1} = (\cos\psi - \sin\psi \sqrt{-1})^n$

aus der bekannten, und bei andern Analysten oft mals schädlich angewandten Meinung geschlossen, dass jedes $\sqrt{-1}$ als ein $\mp \sqrt{-1}$ gebraucht werden könne.

Obgleich ich die Unrichtigkeit dieses Satzes im Allgemeinen schon in Vorerinnerung II. gerügt habe: so wird es doch gerathen seyn, bei diesem einzelen Falle es zu wiederholen, warum er unrichtig ist, und das was Euler durch denselben erwiesen meynt, aus andern Lehren deutlich und richtig zu folgern ist.

§. 22. Nachdem Euler a. a. O. die eine Moivre'sche Gleichung

$$\cos n\psi + \sqrt{-1}.\sin n\varphi = (\cos\psi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)^n$$

lediglich für ganze bejahte Zahlen n inducirt hat, fügt er hinzu: *Cum autem expressio $\sqrt{-1}$ natura sua signi ambiguitatem involvat; erit ob eandem rationem*

$$\cos n\psi - \sqrt{-1}.\sin n\varphi = (\cos\psi - \sqrt{-1}.\sin\varphi)^n;$$

verfällt also hiemit in die fehlerhafte Verwechselung

zwischen einem gesuchten $x = \mp \sqrt{-1}$ (dem man allerdings $\mp$ vorzusetzen hat, wo es von demselben noch ungewiſs ist, ob es ein $+\sqrt{-1}$ oder ein $-\sqrt{-1}$, oder vielleicht auch beides seyn könne oder müsse), und einem gegebnen $\sqrt{-1}$, welches entweder, schlechthin gegeben, auch für ein gegebnes $+1.\sqrt{-1}$ zu achten ist, oder als ein $-1.\sqrt{-1}$ gegeben seyn kann, oder als ein $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ gegeben, also zweimal gegeben seyn muſs.

§. 23. Um diese Moivresche Gleichung kurz und allgemein erwiesen zu haben, ist von uns in §. 1. das bekannte logarithmische Differential

$d \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{2\,dx}{1-xx}$ zum Grunde gelegt, und um

daraus das Bogendifferential $d\varphi$ vermittelst der Tangente zu bestimmen, $x = \operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}$, also $x = \operatorname{tang} \varphi (+\sqrt{-1})$ angesetzt. Allerdings hätten wir statt dessen auch $x = \operatorname{tang} \varphi (-\sqrt{-1}) = -\operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}$ annehmen können, weil auch bei dieser Annahme ebenfalls $1 - xx = 1 + \operatorname{tang} \varphi$ bleibt, also das nöthige in Diff. R. XIII. §. 5 umständlich erörterte Erfordernifs, um das logarithmische Differential $\frac{2\,dx}{1-xx}$ zugleich auch ein trigonometrisches ausmachend zu haben, allerdings vorhanden bleibt; würden aber dann statt $dx = d \operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}$ vielmehr $dx = -d \operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}$, folglich auch in dem Integrale §. 2. statt des $+\varphi$ ein $-\varphi$ erhalten, und demnach auch in §. 17.

statt des obigen $\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})$ ......

nunmehr auch $-\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log (\cos -\varphi + \sin -\varphi \sqrt{-1})$ .. (*I

dergestalt erhalten haben, daſs nunmehr auc dieser Ausdruck des $-\varphi$ durch die obige Integrirung ebenfalls erwiesen ist.

§. 24. In diesen beiden Ausdrücken die absolute Gröſse des $\varphi = n\psi$ gesetzt, so daſs die Zahl n schlechterdings nur eine absolute, übrigens jede ganze und jede gebrochene Zahl bedeuten kann und soll, hat man

II) auch $n\psi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos n\psi + \sin n\psi \sqrt{-1})$

und

*II) auch $-n\psi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos -n\psi + \sin -n\psi \sqrt{-1})$

dergestalt erhalten, daſs jeder von diesen Ausdrücken für sich, der IIte für $+\varphi = n\psi$, der *IIte für $-\varphi = -n\psi$ erwiesen ist;

folglich

III) auch $\mathfrak{n}\, n\psi = \frac{\mathfrak{n}}{\sqrt{-1}} \log(\cos n\psi + \sin n\psi \sqrt{-1})$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos n\psi + \sin n\psi \sqrt{-1})^{\mathfrak{n}}$$

und

*III) auch $\mathfrak{n}(-n\psi) = \frac{\mathfrak{n}}{\sqrt{-1}} \log(\cos -n\psi + \sin -n\psi \sqrt{-1})$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos -n\psi + \sin -n\psi \sqrt{-1})^{\mathfrak{n}}$$

allerdings so allgemein, daſs dieses teutsche $\mathfrak{n}$ jede ganze und gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl seyn kann.

§. 25. Für den einzelen Fall $n = 1$ muſs man also IV) auch $\mathfrak{n}\psi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos\psi + \sin\psi \sqrt{-1})^{\mathfrak{n}}$

und *IV) auch $\mathfrak{n}(-\psi) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos -\psi + \sin -\psi \sqrt{-1})^{\mathfrak{n}}$

allerdings mit einem eben so allgemeinen $\mathfrak{n}$ erhalten.

Wenn nun aber aus den beiden Gleichungen IV) und II) auf die Gleichung

$$\log(\cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1}) = \log.(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$$

also V) auch $\cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1} = (\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$ und eben so aus den beiden Gleichungen *IV) und *II) auf die Gleichung

$$\log(\cos -n\psi + \sin -n\psi\sqrt{-1}) = \log(\cos -\psi + \sin -\psi\sqrt{-1})^n$$

also

*V) auch $\cos -n\psi + \sin -n\psi\sqrt{-1} = (\cos -\psi + \sin -\psi\sqrt{-1})^n$

soll geschlossen werden: so muſs nothwendig $\mathfrak{n}\psi = n\psi$, und $\mathfrak{n}(-\psi) = -n\psi$, in beiden Fällen also $\mathfrak{n} = n$ vorausgesetzt, folglich die allgemeine Bedeutung des $\mathfrak{n}$, für diese Schlüsse auf die engere Bedeutung des n eingeschränkt werden; nach welcher n nur eine beliebige absolute Zahl bedeutend war.

§. 26. Da man aber nach richtigen und deutlichen Lehren der Trigonometrie unter $+\psi$ und $+n\psi$ zwei Bogenlängen mit bejahter Drehung beschrieben, und unter $-\psi$ und $-n\psi$ zwei, eben so lange Kreisbogen von demselben Anfangspuncte an, mit verneinter Drehung beschrieben zu verstehen hat, auch eben daraus folgt, daſs beiderlei Cosinus gleich groſs und gleich gerichtet, beiderlei Sinus aber einander Gegengröſsen sind: so können wir nun neben der Gleichung

V) $\cos n\psi + \sin n\psi\sqrt{-1} = (\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^n$

allerdings auch die Gleichung

*V) $\cos n\psi - \sin n\psi\sqrt{-1} = (\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1})^n$

als ebenfalls richtig und erwiesen behaupten; werden also auch beide Gleichungen in der Kürze durch

$$\cos n\psi \pm \sin n\psi\sqrt{-1} = (\cos\psi \pm \sin\psi\sqrt{-1})^n$$

uns andeuten können; wissen aber nunmehr deutlich

1) daſs diese Gleichung mit ihren oberen Zeichen durch den Gebrauch eines bejaht gedrehten Halbmessers, mit ihren untern Zeichen dagegen durch den Gebrauch eines verneint gedrehten Halbmessers entstanden ist; und

2) wird nun aus der obigen Darstellung es deutlich erhellen, daſs die Moivreschen Gleichungen, zufolge ihrer obigen Begründung, bis jetzt nur für ein absolutes n erwiesen sind.

§. 27. Jedes absolute n aber muſs, sobald es dem algebraischen $\mp$ soll unterworfen werden, nothwendig als ein bejahtes n, als ein $+n$ betrachtet werden *). Gerade hiedurch läſst es sich nun sogleich darthun, daſs eben deshalb, weil die beiden Gleichungen V) und *V) für ein bejahtes n erwiesen sind, sie auch vollkommen richtig bleibend seyn müssen, wenn man statt jedes ihrer n ein $-n$ gesetzt hat.

Denn indem durch diese Umänderung des n, aus der Gleichung V) die Gleichung

VI) $\cos -n\psi + \sin -n\psi\sqrt{-1} = (\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^{-n}$

sich ergibt, diese aber

auch $\cos n\psi - \sin n\psi\sqrt{-1} = \dfrac{1}{(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})^{n}}$,

und in ihrer rechten Seite die Stammgröſse

$\dfrac{1}{\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1}} = \cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1}$ ist: so muſs

*) Ich erinnere hier wiederum, daſs diese Nothwendigkeit von mir in der zweiten Auflage der Algebraischen Auflösung arithmetrischer und geometrischer Aufgaben, Freyberg 1808, aus eigenthümlichen Gründen erwiesen ist.

sie der Gleichung

*V) $\cos n\psi - \sin n\psi \sqrt{-1} = (\cos\psi - \sin\psi\sqrt{-1})^n$ congruent seyn, die wir als richtig schon erwiesen wissen.

Eben so erhellet, dafs in dieser Gleichung *V) statt jedes ihrer n ein $-n$ geschrieben, eine Gleichung giebt, welche der V) congruent, also hiemit ebenfalls als richtig erwiesen ist.

§. 28. Um diese für die ganze Analysis so wichtige Allgemeinheit der Moivreschen Gleichungen nicht durch mühselige immerfort nur wiederholte Inductionen, sondern in der Kürze überzeugend erwiesen zu sehen, schien es mir das rathsamste, mit dem Hrn. Hofr. Mayer in dessen Lehrbegriffe der höhern Analysis I. Seite 119—126, von der bereits erwiesenen Allgemeinheit des logarithmischen und trigonometrischen Differentiales Gebrauch zu machen. Dabei aber würde man einen Fehlschlufs begehen,

wenn man aus $\psi = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})$

nicht nur auf $n\psi = \frac{n}{\sqrt{-1}} \log(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})$

schliefst; sondern

auch auf $-n\psi = \frac{-n}{\sqrt{-1}} \log(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})$ eben so richtig glaubt schliefsen zu können; welches darum unrichtig ist, weil in diesen beiden Gleichungen, ihre rechten Seiten völlige Gegengröfsen sind, ihre linken Seiten $+n\psi$ und $-n\psi$ aber dieses nicht sind, wo nicht schlechthin von der Länge dieser beiden Bogen, sondern von ihren Sinus und Cosinus die Rede seyn soll; von denen nur die ersteren,

nicht aber auch die letzteren, gegenstimmig gerichtet sind.

§. 29. Der Bogen φ mufste für die bisherigen Lehren, seit §. 17, als ein vielfaches $\pm n\psi$ betrachtet werden. Da hiebei n jede ganze und gebrochene Zahl bedeuten konnte, und es schon dadurch gewifs genug ist, dafs ψ eben so gut wie φ auch jeder Bogen im ganzen Umkreise, in dem Anfangspuncte der Tangentenscala seinen Anfang nehmend, seyn kann: so wollen wir von nun an, um auch in dieser Denomination namentlich mit Euler übereinstimmend zu werden, das bisherige ψ durch φ schreiben, namentlich also auch die obigen Moivre'schen Gleichungen V) und *V), §. 26, als

$$5)\quad \cos n\varphi + \sin n\varphi \sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n$$

$$*5)\quad \cos n\varphi - \sin n\varphi \sqrt{-1} = (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n$$

aufführen, von denen wir nun wissen, dafs ihr n eine jede ganze und gebrochene, sowohl bejahte als verneinte, folglich auch irrationale und algebraisch unmögliche Zahl in jeder dieser beiden Gleichungen seyn kann.

§. 30. Aus diesen beiden Gleichungen kann gefolgert werden,

dafs 6) $2\cos n\varphi$

$$= (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n + (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n$$

und 7) $2\sin n\varphi\sqrt{-1}$

$$= (\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n - (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n$$

seyn mufs; die 6te Gleichung dadurch, dafs man die *5) zur 5) addirt; die 7te Gleichung durch subtrahiren.

§. 31. Da nun $(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^n$

$$\begin{aligned}
&\| \\
&\cos\varphi^n \\
&+ n\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi\sqrt{-1} \\
&- \frac{n.n-1.}{1.2}\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^2 \\
&- \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\cos\varphi^{n-3}\sin\varphi^3\sqrt{-1} \\
&+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}\cos\varphi^{n-4}\sin\varphi^4 \\
&+ \frac{n.n-1,\ldots,n-4.}{1.2.3.4.5}\cos\varphi^{n-5}\sin\varphi^5\sqrt{-1} \\
&- \frac{n.n-1,\ldots,n-5.}{1.2.3.4.5.6}\cos\varphi^{n-6}\sin\varphi^6 \\
&- \frac{n.n-1,\ldots,n-6.}{1.2,\ldots,6.7}\cos\varphi^{n-7}\sin\varphi^7\sqrt{-1} \\
&+ \frac{n.n-1,\ldots,n-7.}{1.2,\ldots,7.8}\cos\varphi^{n-8}\sin\varphi^8 \quad \text{und s. w.;}
\end{aligned}$$

und $(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^n$

$$\begin{aligned}
&\| \\
&\cos\varphi^n \\
&- n\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi\sqrt{-1} \\
&- \frac{n.n-1.}{1.2}\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^2 \\
&+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\cos\varphi^{n-3}\sin\varphi^3\sqrt{-1} \\
&+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}\cos\varphi^{n-4}\sin\varphi^4 \\
&- \frac{n.n-1,\ldots,n-4.}{1.2.3.4.5}\cos\varphi^{n-5}\sin\varphi^5\sqrt{-1} \\
&- \frac{n.n-1,\ldots,n-5.}{1.2.3.4.5.6}\cos\varphi^{n-6}\sin\varphi^6 \\
&+ \frac{n.n-1,\ldots,n-6.}{1.2,\ldots,6.7}\cos\varphi^{n-7}\sin\varphi^7\sqrt{-1} \\
&+ \frac{n.n-1,\ldots,n-7}{1.2.3.4.5.6.7.8}\cos\varphi^{n-8}\sin\varphi^8 \quad \text{und s. w. sich}
\end{aligned}$$

ergibt: so hat man

$$8)\ \cos n\varphi = \cos\varphi^n - \frac{n.n-1.}{1.2}\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^2 + \frac{n.\ldots.n-3.}{1.2.3.4}\cos\varphi^{n-4}\sin\varphi^4 - + \ldots$$

$$9)\ \sin n\varphi = n\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi - \frac{n\ n-1\ n-2.}{1.2.3}\cos\varphi^{n-3}\sin\varphi^3 + \frac{n.\ldots.n-4.}{1.2.3.4.5}\cos\varphi^{n-5}\sin\varphi^5 - + \ldots$$

§. 32. Beide Gleichungen sind nun irgend einer Logarithmisirung nicht mehr unterworfen, aller ihrer Factoren $\sqrt{-1}$, und somit aller algebraischen Unmöglichkeit völlig entledigt, und würden einer trigonometrischen Unmöglichkeit nur dann unterliegend werden, wenn man irgend einen Cosinus oder Sinus gröfser als 1, ihnen aufdringen wollte.

Aber da die Reihen 8) und 9)

$$\text{auch} = \cos\varphi^n.\left[1 - \frac{n.n-1.}{1.2}\tan\varphi^2 + \frac{n.\ldots.n-3.}{1.2.3.4}\tan\varphi^4 - + \ldots\right]$$

$$\text{und} = \cos\varphi^n.\left[\frac{n}{1}\tan\varphi^2 - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\tan\varphi^3 + \frac{n.\ldots.n-4.}{1.2.3.4.5}\tan\varphi^5 - + \ldots\right]$$

sind: so werden sie convergirend nur für ein $\tan\varphi^2 < 1$ seyn, und müssen dagegen divergent für jedes $\mp\varphi$ seyn, dessen $(\tan\varphi)^2 > 1$ ist.

§. 33. Um nun für diese letzteren φ ebenfalls convergente Reihen zu erhalten, werden wir nur, wie oben in §. 11., die Stellen der beiden Glieder in der Stammgröfse umzusetzen haben. Und da

sich dann

$$(\sin\varphi\sqrt{-1} + \cos\varphi)^n$$
$$\|$$
$$(\sin\varphi\sqrt{-1})^n$$
$$+ \frac{n}{1}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-1}\cos\varphi$$
$$+ \frac{n.n-1.}{1.2}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-2}\cos\varphi^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-3}\cos\varphi^3$$
$$+ \frac{n,\ldots,n-3.}{1.2.3.4}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-4}\cos\varphi^4$$
$$+ \frac{n,\ldots,n-1.}{1.2.3.4.5}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-5}\cos\varphi^5$$

und s. w.;

und $(-\sin\varphi\sqrt{-1} + \cos\varphi)^n$

$$\|$$
$$\mp (\sin\varphi\sqrt{-1})^n$$
$$\pm \frac{n}{1}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-1}\cos\varphi$$
$$\mp \frac{n.n-1.}{1.2}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-2}\cos\varphi^2$$
$$\pm \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-3}\cos\varphi^3$$
$$\mp \frac{n,\ldots,n-3.}{1.2.3.4}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-4}\cos\varphi^4$$
$$\pm \frac{n,\ldots,n-4.}{1.2.3.4.5}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-5}\cos\varphi^5$$

und s. w. dergestalt ergibt, dafs in

der zweiten Gleichung die $\substack{\text{obern}\\ \text{untern}}$ Zeichen gelten, je nachdem n eine $\substack{\text{ungerade}\\ \text{gerade}}$ Zahl ist: so wissen wir, dafs $\frac{m}{n}$ jede $\substack{\text{ungerade}\\ \text{gerade}}$ ganze oder gebrochene Zahl bedeutend,

10) auch $\cos m\varphi$

$$= \frac{m}{1}(\sin\varphi\sqrt{-1})^{m-1}\cos\varphi + m_3(\sin\varphi\sqrt{-1})^{m-3}\cos\varphi^3 + m_5(\sin\varphi\sqrt{-1})^{m-5}\cos\varphi^5 \ldots\ldots$$

11) und $\cos n\varphi$

$$= 1(\sin\varphi\sqrt{-1})^n + n_2(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-2}\cos\varphi^2 + n_4(\sin\varphi\sqrt{-1})^{n-4}\cos\varphi^4 \ldots\ldots$$

seyn mufs *). Da nun diese beiden Reihen auch

*10) als $= \sin\varphi^m(\sqrt{-1})^{m-1}.\left[\frac{m}{1}\cot\varphi + m_3\cot\varphi^3 + m_5\cot\varphi^5\ldots\right]$

*11) als $= \sin\varphi^n(\sqrt{-1})^n.\left[1 + n_2\cot\varphi^2 + n_4\cot\varphi^4 + n_6\cot\varphi^6\ldots\right]$

können beschrieben werden; so erhellet, dafs in den beiden Factoren $(\sqrt{-1})^{m-1}$ und $(\sqrt{-1})^n$, wegen ihrer geraden Dignitäten, $m-1$ und n, ihre Unmöglichkeit aufgehoben wird, und diese beiden Reihen sich $\substack{\text{convergent}\\ \text{divergent}}$ ergeben müssen, wo die obige Reihe 8) für $\cos n\varphi$ sich $\substack{\text{divergent}\\ \text{convergent}}$ ergeben würde.

---

*) Der Kürze wegen ist in diesen Reihen z. B. der binomische zweite Coefficient $\frac{n.n-1.}{1.2}$ durch n_2 der binomische dritte Coefficient $\frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3}$ durch m_3 angedeutet; wie es jetzt sehr gewöhnlich ist.

§. 34. Hiemit liegt vor Augen, daſs man bei diesen letzten Ausdrücken des $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$, welche für alle φ, deren $(\mp \operatorname{tang} \varphi)^2 > 1$ ist, convergente Reihen geben, um sie ihrer algebraisch unmöglichen Factoren entledigt zu sehen, zwischen geraden und ungeraden n unterscheiden muſs; welches dagegen bei jenen ersten Ausdrücken 8) und 9) (§. 31) nicht nöthig war. Schon aus diesem Grunde wird es gerathen seyn, allenthalben wo Divergenz und Convergenz der Reihen uns völlig gleichgültig seyn, oder auch wegen des Parallelismus in den Gränz- oder Uebergangs-Fällen, strenge genommen, gar nicht Statt finden können, lieber jener ersten Reihen uns zu bedienen.

Ueberhaupt werde ich die letztern Reihen weiter zu verfolgen nirgend nöthig haben. Auf die einfache und deutliche Weise aber, wie es hier geschehek ist, sie darzustellen, schien mir rathsam und nützlich zu seyn, weil man sonst zu anderen, nicht so nahe liegenden Hülfen zu greifen, und insbesondere auch die Gränzen ihrer Convergenz sehr mühsam aufzusuchen pflegt, auch noch in sehr neulichen Arbeiten darin unrichtig geworden zu seyn scheint.

§. 35. Namentlich bei den nun folgenden ersten Anwendungen dieser Lehren, auf die Frage, für welche algebraische Gleichungen sich ihre Wurzeln vermittelst der trigonometrischen Tafeln durch jene Reihen des $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ vortheilhaft bestimmen lassen, kann es uns völlig gleichgültig seyn, ob die Reihe convergent oder divetgent sey; weil ja, wo n eine bejahte ganze Zahl ist, jede der obigen Reihen mit einer endlichen Gliederzahl abbrechen muſs, für keine Gleichung vom $n$ten Grade aber, meiner festen Ueberzeugung nach, ihre Wurzelu-

chung von namenswerthem Erfolge und practischem Nutzen seyn kann, wenn nicht n eine ganze bejahte Dignität ist.

§. 36. Wenn wir nun in den beiden Gleichungen

$$8)\ \cos n\varphi = 1\cos\varphi^n - \frac{n.n-1.}{1.2}\cos\varphi^{n-2}\sin\varphi^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}\cos\varphi^{n-4}\sin\varphi^4 + - \ldots$$

und 9)

$$\sin n\varphi = \frac{n}{1}\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi - \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}\cos\varphi^{n-3}\sin\varphi^3 + \frac{n.\ldots.n-4.}{1.2.3.4.5}\cos\varphi^{n-5}\sin\varphi^5 - + \ldots$$

nach und nach $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$, und s. w. setzen, so erhalten wir

I) $\cos 1.\varphi = \cos\varphi^1$

II) $\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$

III) $\cos 3\varphi = \cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin\varphi^2$

IV) $\cos 4\varphi = \cos\varphi^4 - 6\cos\varphi^2\sin\varphi^2 + \sin\varphi^4$

V) $\cos 5\varphi = \cos\varphi^5 - 10.\cos\varphi^3\sin\varphi^2 + 5\cos\varphi\sin\varphi^4$

und s. w.

und 1) $\sin 1.\varphi = \sin\varphi^1$

2) $\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$

3) $\sin 3\varphi = 3\cos\varphi^2\sin\varphi - \sin\varphi$

auch $= 3.1.1.\sin\varphi - 4\sin\varphi^3$

und s. w.

§. 37. Jene Formeln für die Cosinus der vielfachen φ lassen sich, da sie vom $\sin\varphi$ nur gerade

Dignitäten enthalten, sämmtlich **rational** auch durch lauter Cosinus ausdrücken: als

II) $\cos 2\varphi = 2\cos\varphi^2 - 1$

III) $\cos 3\varphi = 4\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi$

IV) $\cos 4\varphi = 8\cos\varphi^4 - 8\cos\varphi^2 + 1$

V) $\cos 5\varphi = 16\cos\varphi^5 - 20\cos\varphi^3 + 5\cos\varphi$

§. 38. Man schreibe diese Gleichungen wie folget:

II) $\cos\varphi^2 - \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} = 0$

III) $\cos\varphi^3 - \frac{3}{4}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi = 0$

IV) $\cos\varphi^4 - \cos\varphi^2 - \frac{\cos 4\varphi - 1}{8} = 0$

V) $\cos\varphi^5 - \frac{5}{4}\cos\varphi^3 + \frac{5}{16}\cos\varphi - \frac{\cos 5\varphi}{16} = 0$

nämlich als Gleichungen, die man sich geordnet habe, um den $\cos\varphi$, den Cosinus des einfachen Winkels φ zu **finden**, wenn man einen **gegebnen** $\cos\gamma$ als den Cosinus eines $\gamma = 2\varphi$, oder $= 3\varphi$, oder $= 4\varphi$ und so weiter, will betrachtet, also die letzten Gleichungen eigentlich als folgende

2) $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \frac{\cos\gamma + 1}{2} = 0$

3) $\cos\left(\frac{\gamma}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{4}\cos\gamma. = 0$

4) $\cos\left(\frac{\gamma}{4}\right)^4 - \left(\cos\frac{\gamma}{4}\right)^2 - \frac{\cos\gamma - 1}{8} = 0$

5) $\cos\left(\frac{\gamma}{5}\right)^5 - \frac{5}{4}\left(\cos\frac{\gamma}{5}\right)^3 + \frac{5}{16}\cos\frac{\gamma}{5} - \frac{\cos\gamma}{16} = 0$

will benutzt wissen: so werden wir z. B. durch die **cubische** Gleichung 3) als **solche** sogleich versichert seyn, daſs es, der gegebne $\cos\gamma$ sey welcher er

wolle, für $\cos\frac{\gamma}{3}$ allemal dreierlei Werthe geben muſs, weil es für jede cubische Gleichung allemal drei Gleichungswurzeln gibt.

§. 39. Warum nun das Verhalten zwischen jedem $\cos\gamma$ und den sämmtlichen $\cos\frac{\gamma}{3}$ hiemit übereinstimmend sey, werden wir am besten einsehen, wenn wir bedenken, daſs alle folgenden Cosinus

$$\cos\gamma;\ \cos-\gamma;\ \cos(360^\circ+\gamma);\ \cos(360^\circ-\gamma)$$
$$\cos(2.360^\circ+\gamma);\ \cos(2.360^\circ-\gamma);\ldots\cos(g.360^\circ+\gamma);$$
$$\cos(g.360^\circ-\gamma);\ \ldots.$$

sämmtlich einander gleich sind; oder, mit andern Worten, jedem gegebnen $\cos\gamma$ die unendlich vielen Bogen γ und $-\gamma$, und $g.360^\circ\mp\gamma$ zugehören. (Auch mit aufzuführen, daſs hierin statt eines jeden 360° auch ein -360° noch könnte gesetzt werden, ist nicht nothwendig, weil man leicht übersieht, daſs dadurch für die folgenden Schlüsse nichts neues zu gewinnen sey.)

§. 40. Wenn wir uns nun die sämmtlichen unendlich vielen Bogen, welche einem $\cos\gamma$ zugehören, gedrittelt denken: so haben wir, $2\pi = 360^\circ$ bedeutend,

$$\cos\frac{\gamma}{3};\ \cos\frac{-\gamma}{3};\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\gamma}{3}\right);\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\gamma}{3}\right);$$
$$\cos\left(\frac{2.2\pi}{3}+\frac{\gamma}{3}\right);\ \cos\left(\frac{2.2\pi}{3}-\frac{\gamma}{3}\right)$$

als die ersten sechs Cosinus. Mit diesen müssen die nächstfolgenden

$$\cos\frac{3.2\pi+\gamma}{3};\ \cos\frac{3.2\pi-\gamma}{3};\ \cos\frac{4.2\pi+\gamma}{3};\ \cos\frac{4.2\pi-\gamma}{3};$$
$$\cos\frac{5.2\pi+\gamma}{3};\ \cos\frac{5.2\pi-\gamma}{3}$$

in eben der Ordnung völlig gleich seyn, weil in jedem unterstehenden der Bogen gerade um $2\pi = 360^\circ$ gröſser, als der Bogen in dem überstehenden ist.

Da in den sechs dann folgenden Cosinus die Bogen gerade um $2.2\pi = 2.360^\circ$ gröſser, als in den ersten sechs sind: so müssen sie wiederum jenen ersten der Ordnung nach völlig gleich seyn; daſs sie also ebenfalls keine neuen Cosinus einliefern können.

Unter den sechs ersten aber sind, wie man leicht durchsieht, je zwei und zwei einander dergestalt gleich, daſs jeder von diesen sechs ersten Cosinus entweder

$$= \cos\frac{\gamma}{3} \text{ oder } = \cos\frac{360^\circ+\gamma}{3} \text{ oder } = \cos\frac{2.360+\gamma}{2}$$

das ist

$$= \cos\frac{\gamma}{3} \text{ oder } = \cos\left(120^\circ+\frac{\gamma}{3}\right) \text{ oder } = \cos\left(240^\circ+\frac{\gamma}{3}\right)$$

seyn muſs.

§. 41. Da nun hiemit gewiſs ist, daſs eben diese Cosinus für die cubische Gleichung

$$3)\quad \left(\cos\frac{\gamma}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}.\cos\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{4}.\cos\gamma = 0$$

die drei Werthe des $\cos\frac{\gamma}{3}$ angeben müssen, durch welche dieser Gleichung Genüge geschieht: so muſs man z. B. für die cubische Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}a = 0$$

die drei Werthe ihres x vermittelst der Cosinustafeln geradezu finden können, wenn die Zahl a kleiner, oder doch nicht gröſser als 1 gegeben ist; damit man sie als einen **möglichen** Cosinus betrachten könne.

Sey $a = 0{,}9945219$ gegeben, so ist $a = \cos 6^\circ$, also $\gamma = 6^\circ$; und da nun $\frac{\gamma}{3} = 2^\circ$ ist; so müssen die drei Wurzeln dieser Gleichung seyn

$$x = \cos 2^\circ = 0{,}9993908$$
$$x = \cos 122^\circ = -\cos 58^\circ = -0{,}5299193$$
$$x = \cos 242^\circ = -\cos 62^\circ = -0{,}4694716$$

Eine gute Bestätigung für die richtige Rechnung ist es, daſs die Summe dieser drei Wurzeln allerdings $= 0$ gibt; wie es das zweite in dieser Gleichung fehlende Glied bekanntlich erfordert.

§. 42. Jede kubische Gleichung

$$\mathfrak{x}^3 + \mathfrak{A}\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{x} + \mathfrak{C} = 0,$$

läſst sich, wie es sehr bekannt ist, durch $\mathfrak{x} = x - \frac{\mathfrak{A}}{3}$ gesetzt, auf die Form $x^3 \mp Bx \mp C = 0$ bringen, deren Coefficienten B und C nämlich bald bejahlt bald verneint sich ergeben werden.

Aus der obigen trigonometrischen Gleichung 3)

$$\left(\cos\frac{\gamma}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}.1.1.\cos\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{4}.1.1.\cos\gamma = 0,$$

folgt auch

$$\left(\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}.R.R.\,\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{4}.R.R.\,\mathrm{Cos}\,\gamma = 0,$$

wenn wir, wie es sonst schon von uns geschehen ist, $\mathrm{Cos}\,\gamma$ mit einem groſsen C schreiben, wo es die Zahl der Cosinuslinie bedeuten soll, welche in einem Kreise mit dem Halbmesser R beschrieben, dem Winkel γ zugehört; daſs also $\mathrm{Cos}\,\gamma = R\cos\gamma$ ist, indem $\cos\gamma$ mit einem kleinen c geschrieben, die Cosinuszahl des Winkels γ für $R = 1$ bedeutet.

§. 43. Wenn wir nun vermittelst dieser letzten allgemeinen trigonometrischen Gleichung

$$\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\gamma}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}RR\,\mathrm{Cos}\,\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{4}RR\,\mathrm{Cos}\,\gamma = 0$$

für eine andere vorgegebne cubische Gleichung

$$x^3 - Bx \mp C = 0$$

ihr dreifach bewerthetes x als ein dreifach bewerthetes $\mathrm{Cos}\,\frac{\gamma}{3}$, vermittelst der Cosinustafeln zu finden verlangen: so müssen wir

1) $-\frac{3}{4}RR = -B$ und 2) $-\frac{1}{4}RR\,\mathrm{Cos}\,\gamma = \mp C$ zu schaffen wissen,

Die erste Gleichung verlangt $RR = \frac{4}{3}B$ zu nehmen; daher nun die zweite Gleichung den $\mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{\pm 3C}{B}$ verlangt; also einen unmöglichen Cosinus, Falls

$$9\frac{CC}{BB} > \frac{4}{3}B\text{, also } CC > \frac{4}{27}BBB \text{ gegeben ist.}$$

Wo dieses der Fall wäre, würden wir also die vorgegebne Gleichung

$$x^3 - Bx \mp C = 0$$

durch unmittelbare Vergleichung mit der trigonometrischen ohne unmöglichen $\mathrm{Cos}\,\gamma$ nicht darzustellen wissen, obgleich übrigens der dazu erforderliche Halbmesser R, wegen des verneint gegebnen Coefficienten $-B$, sich als möglich ergibt.

Wenn aber statt des $-B$ ein $+B$, also die Gleichung

$$x^3 + Bx \mp C = 0 \text{ gegeben wäre:}$$

so würde sogar der Halbmesser $R = \sqrt{-\frac{4}{3}B}$ sogleich unmöglich seyn müssen!

§. 44. Sey nun in einer vorgegebnen Gleichung $x^3 - Bx \mp C = 0$, welche, um der trigonometrischen $\left(\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}RR\,\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{4}RR\,\mathrm{Cos}\,\gamma = 0$ congruent zu werden, den möglichen Halbmesser $R = \sqrt{\frac{4}{3}B}$ verlangt, auch $\mp C$ in absoluter Gröfse so klein gegeben, dafs das dazu verlangte $(\pm)\ \mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{\mp 3C}{B}$ in absoluter Gröfse nicht gröfser als der Halbmesser R ist, und somit einen möglichen bejahten oder verneinten $\mathrm{Cos}\,\gamma = \frac{3C}{B}$ ausmacht; so wird man sich

entweder $\cos\gamma = \frac{\mathrm{Cos}\,\gamma}{R} = \frac{3C}{B\sqrt{\frac{4}{3}B}}$ berechnen

müssen, um aus den Cosinustafeln, welche den Halbmesser $= 1$ voraussetzen, die Gradzahl des Bogens γ abnehmen zu können;

oder, um etwas bequemer die logarithmisirten Cosinustafeln zu benutzen, welche den Halbmesser $= 10^{10}$ voraussetzen, kann man

$\log\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{R}.10^{10} = \log\frac{3C}{B} - \frac{1}{2}\log\frac{4}{3}B + 10$ finden,

um für diesen Logarithmen die Gradzahl γ aus den Tafeln zu nehmen.

Nunmehr für jeden der drei Winkel

$$\frac{\gamma}{3};\ 120 + \frac{\gamma}{3} \text{ und } 240 + \frac{\gamma}{3}$$

die Logarithmen ihrer Cosinus in den Tafeln aufgesucht, hat man für den ersten Winkel $\frac{\gamma}{3}$

den $\log\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{3}.\frac{10^{10}}{R} = \log\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{3} - \log R + 10$, und

kann daraus, da $\log R = \frac{1}{2} \log \frac{4}{3} B$ ist,

auf $\log \operatorname{Cos} \frac{\gamma}{3}$ schließen.

Eben so auch auf $\log \operatorname{Cos} \left(120^\circ + \frac{\gamma}{3}\right)$ und $\log \operatorname{Cos} \left(240^\circ + \frac{\gamma}{3}\right)$; womit also die drei Logarithmen der drei Wurzelwerthe in der vorgegebnen Gleichung $x^3 - Bx \mp C = 0$ gefunden sind.

§. 45. Daſs sich mit gegebnem $(+) C$ der Cosinus negativ ergibt, schadet der Auflösung nichts; auch beim Gebrauch der Logarithmen nicht, weil man ja weiſs, daſs $(-) \operatorname{Cos} \gamma = \operatorname{Cos} (180^\circ - \gamma)$ ist.

Eine unnöthige Vervielfältigung der Formel ist es daher, wenn man die Cosinus nur

für die Gleichungen $x^3 - Bx - C = 0$,
für die Gleichungen $x^3 - Bx + C = 0$ dagegen
die Sinusgleichung

$$\left(\operatorname{Sin} \frac{\gamma}{3}\right)^3 - \frac{3}{4} RR \operatorname{Sin} \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{4} RR \operatorname{Sin} \gamma = 0 \quad (\text{§. } 36)$$

gebrauchen will. Will man dabei die Bedeutung des γ auf bejahte Bogen des ersten Quadranten einschränken, weil nur diese zugleich bejahte Sinus und Cosinus haben; so müssen daraus üble Folgen in Rechnungen entstehen, an welchen die verneinten Bogen hie und da nothwendig Antheil nehmen müssen.

§. 46. Beispiel für das obige Verfahren.

Die Gleichung $x^3 - 7x - 6 = 0$, vermittelst $\left(\text{Cos}\frac{\gamma}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\text{RR Cos}\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{4}\text{RR Cos}\,\gamma = 0$ aufzulösen, hat man $\text{RR} = \frac{4.7}{3}$ und $\text{Cos}\,\gamma = \frac{3.6}{7}$.

Da nun $\cos\gamma = \frac{\text{Cos}\,\gamma}{\text{R}}$: so hat man

$$\log\cos\gamma = \begin{cases} +\log\text{Cos}\,\gamma \\ -\frac{1}{2}\log\text{RR} \end{cases} = \begin{cases} +\log\frac{18}{7} \\ -\frac{1}{2}\log\frac{4.7}{3} \end{cases}$$

$= 0{,}9251562 - 1$ für den Halbmesser $= 1$;
also $10 + \log\cos\gamma = 9{,}9251562$ für den Halbmesser $= 10^{10}$
also $\gamma = 32^\circ\ 40'\ 18{,}7''$ und daher

1) $\log\cos\frac{\gamma}{3} = \log\cos 10^\circ\ 53'\ 36{,}2'' = 9{,}9921029$

2) $\log\cos\left(120^\circ + \frac{\gamma}{3}\right) = \log\cos 49^\circ\ 6'\ 23{,}8'' = 9{,}8160116$

3) $\log\cos\left(240^\circ + \frac{\gamma}{3}\right) = \log\cos 70^\circ\ 53'\ 36{,}2'' = 9{,}5149817$

ebenfalls für den Halbmesser $= 10^{10}$; daher wir zu jedem dieser drei Logarithmen
noch $-10 + \log\text{R} = -10 + 0{,}4850183$ addiren müssen, um endlich

1) $\log\text{Cos}\frac{\gamma}{3}) = 0{,}4771212$, also $\text{Cos}\frac{\gamma}{3} = +3$

2) $\log\text{Cos}\left(120 + \frac{\gamma}{3}\right) = 0{,}3010299$, also $\text{Cos}\left(120 + \frac{\gamma}{3}\right) = -2$

3) $\log\text{Cos}\left(224 + \frac{\gamma}{3}\right) = 0{,}0000000$, also $\text{Cos}\left(240 + \frac{\gamma}{3}\right) = -1$

gefunden zu haben.

§. 47. Um diese drei Wurzeln der gegebnen Gleichung so genau zu erhalten, war es nöthig, die Winkel fast bis auf ihre 10tel Secunden genau zu finden. Nur auf ganze Minuten gerechnet, würden wir $+ 3,0001$ statt der 3, und $- 1,9996$ statt der $- 2$ gefunden haben; womit man freilich zugestehen muſs, daſs man für dieses Beispiel, mit andern Methoden ungleich leichter gefahren wäre. Wenn aber die Coefficienten der vorgegebnen Gleichung aus vielzifrigen oder auch gebrochenen Zahlen bestehen: so wird diese Auflösung vermittelst der Cosinustafeln allerdings die rathsamste seyn können. Nur muſs ich hinzufügen, daſs alles bisher vorgetragene nur für solche cubische Gleichungen zureicht, welche lauter mögliche Wurzeln haben, wie es sogleich aus §. 41 und 43, mit bekannten Lehren der Algebra verglichen, einleuchtet.

§. 48. Für die übrigen Gleichungen, mit zwei unmöglichen Wurzeln, hat man meines Wissens nur zweierlei andere Methoden bisher anzugeben gewuſst; indem man entweder den Gebrauch der hyperbolischen Sinus und Cosinus voraussetzt, welche von $= 0$ bis ins $\mp \infty$ vorhanden sind; oder man hat die allgemeinen Wurzelformen des Cardanus den trigonometrischen Ausdrücken, am bequemsten vermittelst der Tangenten und Cotangenten, unterworfen.

Jene Sinus und Cosinus der gleichseitigen Hyperbel habe ich zu erklären nicht rathsam gefunden, da ihre Anwendung wegen Mangel dahin gehöriger Tafeln, den Practikern zu mühselig fallen würde.

Das zweite Verfahren wird sicherlich weniger mühsam und bedenklich nicht dargestellt werden können, als es in des Hrn. Eytelwein Grundlehren der höhern Analysis Bd. 1. §. 175. ge-

schehen ist, da Er überhaupt sehr nett und zuverlässig zu calculiren pflegt.

§. 49. Alle seit §. 36. hier von uns aufgeführten Winkel- oder Bogen-Gleichungen, obgleich sie aus einer bekannten Eulerischen Gleichung, die ich aber erst in dem folgenden Kapitel aufführen wollte, noch etwas kürzer sich ergeben, sind hier aus unsern Gleichungen 8) und 9) abgeleitet. Statt derselben etwa die Gleichungen 10) und 11) zu solchen Absichten zu benutzen, würde nichts neues geben können; da beide Gleichungen nur darin verschieden wirken können, dass die eine convergente Reihen für solche φ gibt, bei welchen die Reihen der andern divergent ausfallen. Da aber bei unserem Gebrauche für cubische, oder auch andere geordnete Gleichungen, die Dignität n derselben allemal eine ganze bejahte Zahl ist: so muss es für diese Anwendung einerlei seyn, ob eine convergente oder divergente Reihe dazu benutzt werde.

§. 50. Vor mehren Jahren schon fiel ich auf eine vorzüglich nette und allgemeine Graphik der cubischen Gleichungen, wodurch es mir einleuchtend wurde, wie sich Tafeln berechnen lassen, aus welchen sich für alle cubische Gleichungen, ihre drei Wurzeln ziemlich genau sogleich hernehmen lassen. (Diese Tafeln sind auch durch einen meiner damaligen Zuhörer, den jetzigen Hrn. Provisor Teuchert schon gröſstentheils berechnet; und sollte ich nach Vollendung derjenigen Lehrbücher, deren Ausfertigung ich versprochen habe, noch Kraft und Leben übrig behalten; so würde ich diese Tafeln druckfertig zu machen suchen.) Bei dieser Gelegenheit hatte ich die Hoffnung gefaſst, daſs sich auch die Gleichungen mit unmöglichen Wurzeln unmittelbar, ohne ihre allgemeine Auflösung vorauszusetzen, durch

die trigonometrischen Tafeln dürften behandeln lassen; indessen wurde ich, wie es mir bei meinen neuen Untersuchungen so oft ergangen ist, durch plötzliche Amtsarbeit unterbrochen, ohne darüber aufs Reine gekommen zu seyn.

§. 51. Der Winkelgleichung

$$\left(\cos\frac{\gamma}{4}\right)^4 - \left(\cos\frac{\gamma}{4}\right) - \frac{1}{8}(\cos\gamma - 1) = 0 \ (\S.\ 38)$$

$$\text{oder } \left(\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{4}\right)^4 - RR\left(\mathrm{Cos}\frac{\gamma}{4}\right)^2 - \frac{RRR}{8}(\mathrm{Cos}\,\gamma - R) = 0$$

können nur solche biquadratische Gleichungen congruirend gemacht werden, in denen sich auch der Coefficient des x als = o ergibt, wenn man den Coefficienten des x^3 sich = o verschafft hat. Und auch für diese Gleichungen kann man die Wurzeln vermittelst der Cosinustafeln unmittelbar nur finden, wenn ein unmöglicher Cosinus oder sogar unmöglicher Halbmesser dazu nicht verlangt wird. Wenn Hr. Eytelwein a. a. O. zeigt, wie man für jede biquadratische Gleichung vermittelst der trigonometrischen Tafeln die Wurzeln berechnen könne; so wird dabei ebenfalls eine allgemeine algebraische Auflösung dieser Gleichungen schon vorausgesetzt.

§. 52. Für noch höhere Gleichungen sind dergleichen allgemeine Wurzelformen noch nicht gefunden, können auch vermuthlich gar nicht gefunden werden; und je höher die Grade der Gleichungen steigen, um so seltener finden sich solche unter ihnen, die sich den ihnen zugehörigen Winkelgleichungen congruent machen lassen.

Aber auch ohne Rücksicht auf dergleichen Auflösung algebraischer Gleichungen, ist es äuſserst nützlich und wichtig, diesen Winkel- und Bogen-Calcul um seiner selbst willen

in fernere Untersuchung zu nehmen. Die dahin gehörigen Darstellungen des folgenden Kapitels haben überdies die Absicht, die practische Richtigkeit des Eulerischen Winkelcalculs, wie man in der Kürze ihn am schicklichsten nennen dürfte, zu rechtfertigen, und was in seinen Beweisen mir mangelhaft scheint, zu erörtern und zu ersetzen.

Achtzehntes Capitel.

Euler's Winkelrechnung gerechtfertigt; die neueren calculatorischen Versuche widerlegt, und das dabei aufgestellte Problem beantwortet.

§. 1.

Von nun an wiederum $+\varphi$ eben so, wie im letzten Theile des vorigen Kapitels das dort gebrauchte $+\gamma$, jede Bogenlänge in einem bejahten Kreise bedeutend, die im Anfange der Tangentenscala ihren Anfang, und irgendwo in dem Kreisumfange $2\pi = 2.180$ Gradbogen, ihr Ende hat, und $-\varphi$ in demselben Kreise mit verneint gedrehtem Halbmesser, denjenigen Bogen bedeutend, der mit dem $+\varphi$ einerlei Anfang und gleiche Länge hat, ist es einleuchtend, dafs im einfachen Kreise bei jeder Bogenlänge φ allemal $+\varphi$ und $-\varphi$ die einzigen beiden Bogen ausmachen, deren Cosinus einander völlig gleich, an Länge und an Richtungszeichen einander gleich sind.

Da man sich aber den Kreisumfang auch zum zweiten, zum dritten Mahle und s. w. nicht nur

mit bejaht gedrehtem, sondern auch mit verneint gedrehtem Halbmesser beschrieben denken kann: so erhellet, dafs g jede ganze Zahl bedeutend, nicht nur

$$+\varphi;\ -\varphi;\ \pm\varphi+1.2\pi;\ \pm\varphi+2.2\pi;\ \ldots\ \pm\varphi+g.2\pi$$

sondern auch

$$+\varphi;\ -\varphi;\ \pm\varphi-1.2\pi;\ \pm\varphi-2.2\pi;\ \ldots\ \mp\varphi-g.2\pi$$

eine unendliche Menge von Bogen ist, welche sämmtlich ihren Cosinus $=\cos+\varphi=\cos-\varphi$ haben.

Da indessen in der untern Reihe kein Bogen vorkommt, der von irgend einem Bogen in der obern Reihe um etwas anders als eine Anzahl ganzer Umkreise verschieden wäre; jeder Bogen $(\mp)\varphi$ aber mit jedem Bogen $\varphi\mp g.2\pi$ völlig einerlei Sinus und Cosinus (auch Tangente und Cotangente, u. s. w.) hat: so werden wir für die Absicht der folgenden Tafeln nicht nöthig haben, es ausdrücklich anzumerken, dafs man statt eines jeden darin vorkommenden $\pm 2\pi$ auch dessen Ggengröfse $\mp 2\pi$ zu verstehen berechtigt ist.

§. 2.

Bogentafel, die Vieldeutigkeit der **Cosinus** ganzer und gleichgetheilter Kreisbogen betreffend, $\pm\varphi$ in einem mit $\substack{\text{bejahter}\\\text{verneinter}}$ Drehung des Halbmessers $=1$ beschriebenen Umkreise $\pm 2\pi$ jeden Anfangstheil, nach dem Gesetze der Stetigkeit also auch $=\mp 0$ und $=\mp 2\pi$ bedeutend.

Ganze Bogen.	halbirte Bogen.	gedrittelte Bogen.	geviertelte Bogen.	gefünftelte Bogen.	gesechstelte Bogen.
1) $+\varphi$	$+\frac{\varphi}{2}$	$+\frac{\varphi}{3}$	$+\frac{\varphi}{4}$	$+\frac{\varphi}{5}$	$+\frac{\varphi}{6}$
2) $-\varphi$	$-\frac{\varphi}{2}$	$-\frac{\varphi}{3}$	$-\frac{\varphi}{4}$	$-\frac{\varphi}{5}$	$-\frac{\varphi}{6}$
3) $+\varphi+2\pi$	$+\frac{\varphi}{2}+\frac{2\pi}{2}$	$+\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}$	$+\frac{\varphi}{4}+\frac{2\pi}{4}$	$+\frac{\varphi}{5}+\frac{2\pi}{5}$	$+\frac{\varphi}{6}+\frac{2\pi}{6}$
4) $-\varphi+2\pi$	$-\frac{\varphi}{2}+\frac{2\pi}{2}$	$-\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\varphi}{4}+\frac{2\pi}{4}$	$-\frac{\varphi}{5}+\frac{2\pi}{5}$	$-\frac{\varphi}{6}+\frac{2\pi}{6}$
5) $+\varphi+2.2\pi$	$+\frac{\varphi}{2}+\frac{4\pi}{2}$	$+\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}$	$+\frac{\varphi}{4}+\frac{4\pi}{4}$	$+\frac{\varphi}{5}+\frac{4\pi}{5}$	$+\frac{\varphi}{6}+\frac{4\pi}{6}$
6) $-\varphi+2.2\pi$	$-\frac{\varphi}{2}+\frac{4\pi}{2}$	$-\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\varphi}{4}+\frac{4\pi}{4}$	$-\frac{\varphi}{5}+\frac{4\pi}{5}$	$-\frac{\varphi}{6}+\frac{4\pi}{6}$
7) $+\varphi+3.2\pi$	$+\frac{\varphi}{2}+\frac{6\pi}{2}$	$+\frac{\varphi}{3}+\frac{6\pi}{3}$	$+\frac{\varphi}{4}+\frac{6\pi}{4}$	$+\frac{\varphi}{5}+\frac{6\pi}{5}$	$+\frac{\varphi}{6}+\frac{6\pi}{6}$
8) $-\varphi+3.2\pi$	$-\frac{\varphi}{2}+\frac{6\pi}{2}$	$-\frac{\varphi}{3}+\frac{6\pi}{3}$	$-\frac{\varphi}{2}+\frac{6\pi}{6}$	$-\frac{\varphi}{5}+\frac{6\pi}{5}$	$-\frac{\varphi}{6}+\frac{6\pi}{6}$

Bogentafel, die Vieldeutigkeit der Sinus ganzer und gleichgetheilter Kreisbogen betreffend, $\pm\varphi$ jeden Anfangstheil des $\substack{\text{bejahten}\\ \text{verneinten}}$ Umkreises, wie in voriger Tafel bedeutend.

Ganze Bogen.	halbirte Bogen.	gedrittelte Bogen.	geviertelte Bogen.	gefünftelte Bogen.	gesechstelte Bogen.
1) $+\varphi$	$+\frac{\varphi}{2}$	$+\frac{\varphi}{3}$	$+\frac{\varphi}{4}$	$+\frac{\varphi}{5}$	$+\frac{\varphi}{6}$
2) $-\varphi-\pi$	$-\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\varphi}{3}-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\varphi}{4}-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\varphi}{5}-\frac{\pi}{5}$	$-\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{6}$
3) $+\varphi+2\pi$	$+\frac{\varphi}{2}+\frac{2\pi}{2}$	$+\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}$	$+\frac{\varphi}{4}+\frac{2\pi}{4}$	$+\frac{\varphi}{5}+\frac{2\pi}{5}$	$+\frac{\varphi}{6}+\frac{2\pi}{6}$
4) $-\varphi-3\pi$	$-\frac{\varphi}{2}-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\varphi}{3}-\frac{3\pi}{3}$	$-\frac{\varphi}{4}-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\varphi}{6}-\frac{3\pi}{5}$	$-\frac{\varphi}{6}-\frac{3\pi}{6}$
5) $+\varphi+4\pi$	$+\frac{\varphi}{2}+\frac{4\pi}{2}$	$+\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}$	$+\frac{\varphi}{4}+\frac{4\pi}{4}$	$+\frac{\varphi}{5}+\frac{4\pi}{5}$	$+\frac{\varphi}{7}+\frac{4\pi}{6}$
6) $-\varphi-5\pi$	$-\frac{\varphi}{2}-\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{\varphi}{3}-\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\varphi}{4}-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\varphi}{5}-\frac{5\pi}{5}$	$-\frac{\varphi}{6}-\frac{5\pi}{6}$
7) $+\varphi+6\pi$	$+\frac{\varphi}{2}+\frac{6\pi}{2}$	$+\frac{\varphi}{3}+\frac{6\pi}{3}$	$+\frac{\varphi}{4}+\frac{6\pi}{4}$	$+\frac{\varphi}{5}+\frac{6\pi}{5}$	$+\frac{\varphi}{6}+\frac{6\pi}{6}$
8) $-\varphi-7\pi$	$-\frac{\varphi}{2}-\frac{7\pi}{2}$	$-\frac{\varphi}{3}-\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{\varphi}{4}-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\varphi}{5}-\frac{7\pi}{5}$	$-\frac{\varphi}{6}-\frac{7\pi}{6}$

§. 3. In der Säule unter cos φ sind die sämmtlichen Bogen aufgeführt, welche es für einerlei cos φ geben kann; in der zweiten Säule die Hälften, in der dritten und vierten Säule die Drittel und Viertel derselben. In der zweiten Säule liegt vor Augen, daſs mit ihren ersten 4 halben Bogen, die nächstfolgenden vier völlig einerlei Cosinus, und mit diesen auch jede fernerhin auf einander folgenden vier Bogen, immerfort einerlei Cosinus haben müssen; weil ja ihre Unterschiede in lauter ganzen Umkreisen bestehen. Da nun unter den 4 ersten Cosinus, der erste und der zweite, auch der dritte und der vierte, wiederum völlig einander gleich sind: so ist hiemit gewiſs, daſs die sämmtlichen halbierten Bogen nicht mehr als zwei verschiedene Cosinus haben können.

Von den gedrittelten Bogen in der dritten Säule, müssen sehr einleuchtend jede 6 nachfolgenden mit den ersten 6 Bogen einerlei Cosinus haben, weil sie der Ordnung nach von jenen ersten allemal um ganze Kreise verschieden sind. Da nun unter den ersten 6 Bogen der 1te und der 2te, der 3te und der 4te, der 5te und der 6te, völlig gleiche Cosinus haben: so erhellet, daſs den sämmtlichen unendlich vielen gedrittelten Bogen mehr als drei verschiedne Cosinus nicht zukommen können.

Auf ähnliche Weise läſst es sich leicht durchsehen, daſs den sämmtlichen, unendlich vielen geviertelten Bogen, mehr als 4 verschiedene Cosinus nicht zugehören können; und überhaupt, wenn die sämmtlichen Bogen der ersten Säule in q gleiche Theile zerlegt gedacht werden, diese sämmtlichen q tel-Bogen mehr als q verschiedene Cosinus nicht einliefern können.

§. 4. Da nun mit der trigonometrischen Gleichung

$$\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{4}\right)^4 - RR\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{RRR\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{8} = 0$$

welche aus der Gleichung, in Kap. XVII. §. 38, das dortige γ jetzt durch φ geschrieben, für den Halbmesser R sich ergibt, nur eine solche biquadratische Gleichung, welche

der Form $x^4 + Bx^2 + D = 0$ unterwerfbar ist,

und mit der trigonometrischen Gleichung

$$\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{5}\right)^5 - \frac{5}{4}RR\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{5}\right)^3 + \frac{5}{16}RRRR\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{5} - R^4\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{16} = 0$$

welche eben so aus der Gleichung 5) a. a. O. sich ergiebt, nur eine solche Gleichung des 5ten Grades, die der Form

$x^5 + Bx^3 + Dx + E = 0$ unterwerfbar ist,

congruent gemacht werden kann: so erhellet, dafs es unter den höheren und höheren Gleichungen immer weniger und weniger solche gibt, die sich denen trigonometrischen congruent machen lassen, durch deren verschiedene Cosinus man die verschiedenen Wurzeln der algebraischen Gleichungen angegeben hoffen könnte.

§. 5. Diese Hoffnung aber wird nun überdies gar ofte noch dadurch vereitelt, dafs die verlangte Congruenz auf unmögliche Cosinus, oder sogar auf einen unmöglichen Halbmesser führen würde, woraus sich denn bei genauer Verfolgung der Reihe ergeben mufs, dafs man nur für solche Gleichungen, welche lauter mögliche Wurzeln haben, die Hoffnung fassen darf, auf obige Weise die Wurzeln als Cosinus-Gröfsen finden zu könnnen.

§. 6. Aus der zweiten Tafel in §. 2, in ihrer ersten Säule die sämmtlichen Bogen darstellend, wel-

che einerlei sin φ haben, erhellet, dafs für die unendlich vielen halbirten Bogen, nicht mehr als 2 verschiedene Sinus, für die gedrittelten Bogen nicht mehr als 3 verschiedene Sinus Statt finden, u. s. w.

Allerdings gibt es einige algebraische Gleichungen, deren Wutzelwerthe sich durch die verschiedenen Sinus der getheilten Bogen etwas bequemer als durch die Cosinus bestimmen lassen, und selbst auch einige quadratisch irrationale Gleichungen würden vermittelst jener Sinus können gelöset werden: überhaupt genommen aber werden diese Sinus noch seltener, als jene Cosinus sich hiezu anstellig beweisen; daher ich mich dabei nicht aufhalten will.

Ueberdies aber habe ich diese Winkelrechnung, namentlich vermittelst der Cosinus, so umständlich, als es geschehen ist, hier zu erörtern für nöthig gehalten, um gewisse Vorwürfe, welche dem Eulerischen Winkelcalcul und dessen Begründung in der Abhandlung, *Subsidium calculi sinuum (Novi Commentarii Acad. scient. Petropol. ad annum* 1756) seit nunmehr 15 Jahren gemacht sind, gehörig beurtheilen zu können.

§. 7. Die erste Aufgabe, welche im dortigen §. 5. von Euler aufgestellt wird, und für sein ganzes System wesentlich wichtig bleibt, ist folgende.

Jede Potenz $\cos\varphi^n$ (das heifst, $(\cos\varphi)^n$) für jeden Winkel φ, durch lauter einfache Cosinus auszudrücken, dafs nirgend ein Product aus zwei oder mehren solchen einfachen Cosinus in dem Ausdrucke vorkomme.

§. 8. Eulers Auflösung im Wesentlichen beibehalten, nur etwas abgekürzt und anders geordnet,

lafst uns zuvörderst lediglich fordern,
dafs $u = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$, und $v = \cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}$
der Kürze wegen bedeuten soll: so haben wir

$$2\cos\varphi = u + v, \text{ also } 2^n \cos\varphi^n = (u+v)^n$$
$$\text{auch } = (v+u)^n;$$

$$\text{also } 2^n\cos\varphi^n = u^n + \frac{n}{1} u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v^2 + n_3 u^{n-3} v^3 \ldots$$
$$\ldots + n_r u^{n-r} v^r \ldots$$

$$\text{auch } 2^n\cos\varphi^n = v^n + \frac{n}{1} v^{n-1} u + n_2 v^{n-2} u^2 + n_3 v^{n-3} u^3 \ldots$$
$$\ldots + n_r v^{n-r} u^r \ldots$$

folglich

$$\text{E) } 2.2^n\cos\varphi^n = u^n + v^n + \frac{n}{1}(u^{n-2} + v^{n-2}) + n_2(u^{n-4} + v^{n-4})$$
$$\ldots + n_r(u^{n-2r} + v^{n-2r}) \ldots$$

denn für die allgemeinen Glieder der beiden Reihen ist die

$$\text{Summe } u^{n-r}v^r + v^{n-r}u^r = u^{n-2r}v^r u^r + v^{n-2r} u^r v^r$$

also wegen

$$uv = \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1, \text{ auch } = u^{n-2r} v^{n-2r}.$$

Bis hieher mufs sehr offenbar die Reihe, zugleich mit dem allgemeinen Binomialtheoreme, für jedes bejahte und verneinte, ganze und gebrochene, also auch rationale und unmögliche n, allgemein gültig seyn.

Indem wir nun ferner mit Euler aus den Moivrischen Gleichungen, $u^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi\sqrt{-1}$
und $v^n = \cos n\varphi - \sin n\varphi\sqrt{-1}$

auf $u^n + v^n = 2\cos n\varphi$ nicht nur schliefsen, sondern
auch $u^{n-2r} + v^{n-2r} = 2\cos(n-2r)\varphi$ gebrau-

chen, um Eulers Gleichung

$$*E)\ 2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + n_2\cos(n-4)\varphi$$
$$+ n_3\cos(n-6)\varphi + \ldots.$$

zu erhalten: so wird hiemit das Moivresche Theorem, auch für verneinte Werthe seines n als gültig vorausgesetzt! Denn selbst auch für solche vorgegebne $2^n \cos\varphi^n$, deren n als eine bejahte ganze Zahl gegeben wäre, würden doch in der Binomialreihe solche r te Glieder vorkommen, für welche in der hier behaupteten

Gleichung $u^{n-2r} + v^{n-2r} = 2\cos(n-2r)\varphi$

$n - 2r$ eine verneinte Zahl wäre; und wo n als eine gebrochene Zahl, oder auch als irgend eine verneinte Zahl gegeben wäre, würden solcher Glieder sogar unendlich viele vorkommen müssen. Die allgemeine Richtigkeit der Eulerischen Reihe *E würde sich allerdings als praktisch richtig erweisen lassen, auch wenn man Moivre's Lehrsatz nur für bejahte n erwiesen hätte. Da dieser Lehrsatz, diese Potenziirungs-Regel, von uns in Kap. XVII. §. 27. auch für alle verneinte n schon erwiesen ist: so sind wir geradezu überzeugt, daſs Eulers Gleichung *E noch eben so allgemein richtig geblieben seyn muſs, als die Reihe E, zufolge des allgemein erwiesenen Binomialtheoremes, es seyn muſste.

§. 9. Wenn nun aber die Frage entsteht, in welchen Fällen diese Reihe zur Gröſsen-Bestimmung eines vorgegebenen $\cos\varphi^n$ unmittelbar brauchbar sey: so muſs man freilich eingestehen, daſs sie durch eine additive Verbindung zweier Reihen gefunden ist, von denen die eine nur für alle solche φ, deren $(\mp \operatorname{tang}\varphi)^2 < 1$ ist, die andere dagegen nur für solche φ, deren $(\mp \operatorname{tang}\varphi)^2 > 1$ ist, sich convergent

ergeben kann; daher sie zur Gröſsenbestimmung des $\cos\varphi^n$ unmittelbar brauchbar nur bleiben kann,

1) wenn n eine bejahte ganze Zahl r ist, folglich mit dem vernullten r ten Binomial-Coefficienten die Reihe beendigt, und daher auch durch ihre etwanige Divergens die Berechnung nicht verhindert wird;

2) wenn $(\mp \tan\varphi)^2 = 1$, also die Reihe weder convergent noch divergent bleibend, sondern parallel werdend ist, und eben deshalb Näherungsweise noch summirt werden kann;

3) wenn die Reihe zwar divergirend unendlich fortlaufend, die Aequivalenz ihres Gesammtertrages aber dessen ungeachtet bekannt ist.

§. 10. Ein merkwürdiges Beispiel der letzten Art gibt diese Reihe *E) wenn ihr $n = \frac{1}{3}$ und ihr $\varphi = \pi = 180°$ gesetzt wird.

Denn da

$$\cos\frac{1}{3}\pi = \cos\left(\frac{1}{3}-2\right)\pi = \cos\left(\frac{1}{3}-4\right)\pi = \cos\left(\frac{1}{3}-6\right)\pi$$

und s. w. (nach §. 2) ist: so muſs diese Reihe *E als

$$2^{\frac{1}{3}}\cos\pi^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{\pi}{3}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)_1+\left(\frac{1}{3}\right)_2+\left(\frac{1}{3}\right)_3+\left(\frac{1}{3}\right)_4\cdots\right]$$

das ist $= \cos\frac{\pi}{3}\cdot\left[(1+1)^{\frac{1}{3}}\right] = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt[3]{2}$ sich ergeben.

Da nun aber $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{180^\circ}{3}$ nach §. 2. nicht nur

1) $= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

sondern auch

2) $= \cos(60^\circ + 120^\circ) = \cos 180^\circ = -1$

und noch

3) $= \cos(60^\circ + 240^\circ) = \cos 300^\circ = \cos 60 = \frac{1}{2}$ ist:

so erhellet, dafs uns die Eulerische Gleichung *E

für $(2\cos 180^\circ)^{\frac{1}{3}}$ allerdings $= -1.\sqrt[3]{2}$, durch den 2ten,

überdies aber auch $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, durch den 1ten,

und abermals $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, durch den 3ten

Werth des $\cos\frac{180^\circ}{3}$ angibt; dafs wir also ihr zufolge, für $(\cos 180^\circ)^{\frac{1}{3}}$ die drei Werthe -1; $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ erhalten haben.

§. 11. Wenn dagegen das vorgegebene $(\cos 180^\circ)^{\frac{1}{3}}$, als $= \sqrt[3]{-1}$ betrachtet, und durch algebraische Gleichungslehre behandelt wird: so ist es sehr bekannt, dafs dadurch für $\sqrt[3]{-1}$, ausser der einen möglichen Wurzel $= -1$ auch noch zwei unmögliche, $= \frac{1}{2} \mp \sqrt{-\frac{3}{4}}$ gefunden werden. Eulers trigonometrische Reihe hat uns von diesen drei algebraischen Wurzeln die eine mögliche, $= -1$ vollkommen richtig, von den beiden un-

möglichen doch ihre möglichen Theile $= \frac{1}{2}$ allerdings richtig angegeben, in diesem Beispiele! In andern Fällen aber wird nicht einmal die Anzahl der trigonometrischen Werthe, welche Eulers Reihe angeben muſs und soll, mit der Anzahl der algebraischen Wurzeln übereinstimmend seyn können; welche die algebraische Gleichungslehre angeben und behaupten muſs.

§. 12. Sey $n = \frac{1}{3}$ wie vorhin, aber $\varphi = 45^\circ$ gegeben, so würden in Eulers Reihe die ersten vier Cosinus

$$\cos\frac{1}{3}.45^\circ; \cos-\frac{5}{3}.45^\circ; \cos-\frac{11}{3}.45^\circ \text{ und } \cos-\frac{23}{3}.45^\circ$$

also $\cos\frac{45^\circ}{3}$; $\cos\frac{225^\circ}{3}$; $\cos\frac{495^\circ}{3}$ und $\cos\frac{1035^\circ}{3}$, eben so viel verschiedene Gröſsen ausmachen; denn erst die dann folgenden vier Cosinus der Eulerischen Reihe, deren Winkel um volle 360° von den Winkeln der vier ersten verschieden geworden sind, würden vier eben so groſse Cosinus einliefern, und s. w.

Jene vier ersten Cosinus von gedrittelten Winkeln, werden schon 12 verschiedene trigonometrische Werthe einliefern; und bei sehr vielen andern φ würden dergleichen unzählbar viele sich ergeben müssen; indeſs doch $(\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}$ als $\sqrt[3]{\cos\varphi}$ immer nur drei algebraische Wurzeln haben muſs!

§. 13. Absichtlich habe ich es schon mit einflieſsen lassen, daſs die beiden unmöglichen Werthe für $\sqrt[3]{-1}$ durch die algebraische Gleichungs-

ehre gefunden werden. Man setze $\overset{3}{r}-1 = x$, so mufs $-1 = x^3$, also $x^3 + 1 = 0$ seyn. Da nun $x = -1$ eine Wurzel dieser Gleichung ist: so mufs der Quotient $\frac{x^3+1}{x+1} = x^2 + x + 3 = 0$ gesetzt, die beiden übrigen Werthe des x in der cubischen Gleichung angeben.

Hier haben wir in der cubischen Gleichung, mit einer ganzen, bejahten Dignität 3 es zu thun. Da nun überhaupt, meiner Ueberzeugung nach, kein Versuch zur algebraischen Gleichungsauflösung im allgemeinen rathsam ist, wo man sich noch nicht auf lauter bejahte ganze Dignitäten gebracht hat: so werden wir auch vermittelst ganzer bejahter Dignitäten am besten es durchsehen lernen, warum man von dem obigen Eulerischen trigonometrischen Ausdrucke eines $\cos \varphi^{\frac{1}{3}}$ es nicht verlangen müsse, dafs er auch die obigen binomischen Wurzeln desselben allemal angeben solle.

§. 14. Wenn wir oben (XVII. §. 43.) die cubische Gleichung

$x^3 + Bx + C = 0$ vermittelst der trigonometrischen $\left(\text{Cos}\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\text{RR Cos}\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{4}\text{RR Cos}\,\varphi = 0$

aufzulösen verlangten: so mufste sie jener algebraischen dadurch dadurch congruent gemacht werden, dafs wir den trigonometrischen

Halbmesser $R = r - \frac{4}{3}$ verlangten,

und $\text{Cos}\,\varphi = -\frac{4C}{RR}$ dadurch fanden.

Wenn sich hiebei nicht nur der Halbmesser R, sondern auch der $\text{Cos}\,\varphi$ als eine mögliche Gröfse er-

gibt: so ist es, daſs die drei möglichen Werthe des $\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{3}$, auch die drei Werthe des x in der cubischen Gleichung seyn müssen, eigentlich nur dadurch gewiſs, weil in diesen Fällen die cubische Gleichung gerade drei mögliche Wurzeln haben muſs.

Wenn sie aber entweder wegen eines bejaht gegebnen Coefficienten B, oder doch wegen eines, in absoluter Gröſse zu groſs gegebnen $\mp C$, unmögliche Wurzeln hat: so wird es für die trigonometrische Gleichung, im ersteu Falle nicht einmal einen möglichen Halbmesser R, im zweiten Falle aber doch keinen möglichen $\mathrm{Cos}\,\varphi$ geben; wird daher für die Werthe des x durch die trigonometrische Gleichung nichts bestimmt werden können.

Hier werden wir indessen durch den unmöglichen Halbmesser, oder den unmöglichen Cosinus doch noch benachrichtigt, daſs Unmöglichkeiten in den Werthbestimmungen des x vorhanden sind.

§. 15. Wenn wir aber, um die drei Werthe des $\sqrt[3]{-1} = x$, durch Eulers trigonometrische Reihe bestimmt zu finden, auf die

algebraische Gleichung $x^3 + 0 . x + 1 = 0$

die trigonometrische

$$\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\,RR\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{4}\,RR\,\mathrm{Cos}\,\varphi = 0$$

(welche aus Eulers Gleichung E) eben so, und noch kürzer folgt, als sie im vorigen Kapitel aus unserer dortigen Gleichung 8) §. 36. gefolgert ist) anzulegen suchen: so wird sie sogleich angeben, daſs sie ihren Halbmesser $R = 0$ dafür fordern, das heiſst, zu allen dabei von ihr verlangten Bestimmungen sich unfähig erklären müſste!

§. 16. Euler, dem wir die Erfindung des Winkel-Calculs mit Benutzung dessen, was er seinem Lehrer, Johann Bernoulli zuzuschreiben pflegt, und namentlich die Systematisirung desselben, in seinem erwähnten *Subsidio* zu verdanken haben, Euler selbst hat es in der That von seiner Reihe für $2^n \cos \varphi^n$ durchaus nicht verlangt, daſs sie für ein gebrochenes $n = \frac{p}{q}$, die q algebraischen Wurzeln des $(2 \cos \varphi)^p$ ihm angeben solle; sondern lediglich für die von ihm beabsichtigten trigonometrischen Entwickelungen hat er seine Reihen gefunden und gebraucht.

§. 17. Durch den Satz, daſs $\psi = 90^\circ - \varphi$ bedeutend, $\sin \psi = \cos \varphi$ ist, weiſs Euler aus seiner für $\cos \varphi^n$ gefundenen Reihe, auch die für $\sin \psi^n$ gehörige in eben der Allgemeinheit zu folgern. Wenn dann aber für das Product $\cos \varphi^n \sin \varphi^m$ verlangt wird, es ebenfalls durch einzele Sinus oder Cosinus ausgedrückt zu wissen: so kann jener Satz dazu nicht allgemein verhelfen; und es ergibt sich dafür, daſs in diesem Producte zwar n, die Dignität des Cosinus, jede ganze und gebrochene Zahl, m aber, die Dignität des Sinus, nur eine ganze bejahte oder verneinte Zahl seyn kann, und noch dazu verschieden muſs behandelt werden, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Zahl ist.

§. 18. Dann erst wird es von Euler gezeigt, wie für viele dadurch erhaltene Reihen, auch die endliche trigonometrische Function sich darstellen lasse, durch deren Entwickelung die Reihe ebenfalls sich ergeben würde,

Bei diesem Gange des Eulerischen Calculs war es unbedenklich, zur Gewinnung seiner bequemen

und netten Reihe für $z^n \cos \varphi^n$, sogleich zwei Reihen additiv zu verbinden, von denen die eine divergent seyn muſs, wenn die andere convergent ist. Auch war es nicht nöthig bei gebrochenen $n = \frac{p}{q}$, auf die q verschiedenen Werthe des $\cos \frac{\varphi}{q}$ zu achten; da von diesen einzelen Werthen das Verhalten zwischen der erzeugenden und der erzeugten Function unabhängig ist.

§. 19. Sollte man sich veranlaſst finden, dieses Reihensystem zu prüfen, so würde besonders darauf zu achten seyn, ob Eulers dabei gebrauchte Methode der unbestimmten Coefficienten, die ich nach Diff. R. Cap. XVII. nur als eine calculatorische Hypothese zu betrachten angerathen habe, auch durch richtigen Erfolg hier als zutreffend bestätigt werde! Indessen ist es bekannt, daſs Euler selbst, auch wenn die Gründe seines Calculs etwas zu eilfertig angelegt sind, gleichwohl auf richtige Resultate zu kommen pflegt.

§. 20. Bei allen uns bevorstehenden Anwendungen auf technische Mathematik aber werden wir wohl nie mit einem Integrand $\int \cos \varphi^n \sin \varphi^m \, d\varphi$ es zu thun haben, welches wir nicht durch die weit einfacheren und allgemeiner systematisirten Reductionen im XIIIten Kapitel auf ein bekanntes Integral zu bringen wüſsten; daher ich dieses Eulerischen Reihen-Calculs gar nicht erwähnt haben würde, wenn nicht seit einigen Jahren eine, zuerst von Herrn Poisson im Jahre 1811 behauptete Unrichtigkeit

der Eulerischen obigen Gleichung

$$*E)\ 2^n \cos\varphi^n = 1.\cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n+2)\varphi + n_2\cos(n-4)\varphi + n_3\cos(n-6)\varphi$$

viel Aufsehen erregt, und mehre andere Mathematiker veranlafst hätte, ebenfalls müheame calculatorische Versuche in der Hoffnung mitzutheilen, dafs es ihnen gelungen sey, die durch Hrn. Poisson hier aufgestellte Lücke in der Analysis auszufüllen.

So viel von diesen Versuchen mir bekannt geworden ist, so hat man dabei allemal auf unrichtige Voraussetzungen sich gegründet. Bei dieser meiner Ueberzeugung, und bei der wahrscheinlich nur sehr geringen, mir noch übrigen Lebensdauer, habe ich mich freilich nicht entschliefsen können, diejenigen mühsamen Versuche, welche ich vollständig in Händen gehabt habe, sorgfältig und in ihren einzelen Schlüssen zu verfolgen. Die meisten derselben kenne ich nur aus den Auszügen und Recensionen derselben, welche insgesammt beifällig waren, und diese calculatorischen Arbeiten einer sorgfältigen Bekanntmachung werth achteten. Hrn. Poisson's erste Abhandlung im 2ten Bande der *Correspondence sur l'Ecole Polytechnique* 1811, durch welche die vielen hieher gehörigen Erörterungen und calculatorischen Versuche veranlafst sind, hatte ich freilich immer noch mir zu verschaffen gewünscht. Indessen finde ich so eben von dem mit Recht berühmten Verfasser, in dem *Bulletin des sciences mathématiques, Septembre* 1825, die Sache neu bearbeitet vor, wie er es wegen der darüber erfolgten Discussionen für gut gehalten hatte. Auch in dieser neuen Behandlung habe ich nichts vorgefunden, weshalb ich irgend etwas in meinem Manuscripte abzuändern gehabt hätte. Denn da ich hierin die ganze, bei der Untersuchung von Hrn. Poisson und andern gefafste Ansicht der Sache als unrichtig, und die von Hrn. Poisson und andern dabei zum Grunde gelegte Formel, als nicht zwecktreffend dargestellt habe: so verschlägt es mir nichts, ob etwa schon in den vorigen Bearbeitungen, durch mancherlei aufgegriffene Substitutionen, und einen hin und her versuchenden Calcul, hie und da einige richtige Sätze gewonnen, und in einer neueren Bearbeitung etwa durch etwas glücklicher getroffene calculatorische *Taitonne-*

ments getroffen sind. Ich vermag es auch nicht über mich, dergleichen calculatorische Experimente, nebst den dabei eingestreuten Incidenz-Betrachtungen, ernstlich zu verfolgen; besonders aber da nicht, wo ich durch vorläufige Ueberschauung des Gegenstandes, den geraden Weg, der zum Ziele führen muſs, bereits dergestalt vor Augen habe, daſs ich jeden Ortes den dahin gehörigen Calcul, als richtig eingreifendes Instrument anzulegen hoffen könnte, nicht aber mich als dem Calcul untergeordnet würde zu betrachten haben.

§. 21. Wenden wir, sagt Hr. Poisson, die Eulerische Gleichung auf $n = \frac{1}{3}$ und $\varphi = \pi = 180^\circ$ an; so giebt sie uns

$$(2\cos\pi)^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)_1 \cos-\frac{5\cdot\pi}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)_2 \cos-\frac{17\cdot\pi}{3}$$
$$+\left(\frac{1}{3}\right)_3 \cos-\frac{17\cdot\pi}{3} \ldots\ldots$$
$$= \left[1+\left(\frac{1}{3}\right)_1+\left(\frac{1}{3}\right)_2+\left(\frac{1}{3}\right)_3+\left(\frac{1}{3}\right)_4+\ldots\right].\cos\frac{\pi}{3}$$

das ist $= \left[\sqrt[3]{2}\right].\frac{1}{2}$;

da doch $(2\cos 180^\circ)^{\frac{1}{3}}$ als $= \sqrt[3]{(2.-1)}$ offenbar $= \sqrt[3]{-1}$ seyn muſs!

§. 22. In allen mir hierüber vorgekommenen französischen und teutschen Relationen und Recensionen wird es dem Hrn. Poisson zugestanden, daſs er diese Unrichtigkeit der Eulerischen Formel zuerst, und zugleich auch den wahren Grund solcher Unrichtigkeit richtig entdeckt habe: weil nämlich Eulers Gleichung durch additive Verbindung zweier Reihen erhalten werde, von denen die eine divergent seyn muſs, wenn die andere convergent ist. (Es sind die beiden Reihen u^n und v^n in Kap. XVII. §. 31.)

§. 23. Aber da man in diesem Beispiele die Eulerische Reihe für genau summirbar anerkannte, indem man vollkommen richtig es einsah, daſs sie ganz bestimmt den Ertrag $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ anzugeben vermochte: so würde ja die vermeinte Unrichtigkeit ihrer Angabe in einem Mangel der Convergenz nicht zu suchen seyn können. Ueberdies würden ja die beiden von Euler additiv verbundenen Reihen für jedes $\mp\varphi$ welches $(\tang\varphi)^2 = 1$ giebt, weder divergent noch convergent bleibend, sondern parallel werdend seyn müssen, und gleichwohl würde sich auch in diesen Fällen dergleichen Mishelligkeit zwischen den algebraischen Werthen des $(2\cos\varphi)^{\frac{1}{q}}$ und den trigonometrischen Werthen der Eulerischen Reihe ebenfalls einstellen müssen!

§. 24. Um den wahren Grund dieser Mishelligkeit aufzufinden, und diese Mishelligkeit als eine wesentlich nothwendige Verschiedenheit zwischen der trigonometrischen und der algebraischen Vieldeutigkeit anzuerkennen, laſst uns bedenken, daſs das obige gesuchte $\sqrt[3]{-1} = x$ gesetzt, die drei Werthformen des x, nämlich $x = -1$, und $x = \frac{1}{2} \mp \sqrt{-\frac{3}{4}}$ sich ergeben müssen, wenn man aus dem gesuchten $\sqrt[3]{-1} = x$ auf die Gleichung $-1 = x^3$, also auf die geordnete Gleichung $x^3 + 1 = 0$ schlieſst, und die drei Gleichungswurzeln algebraisch auffindet.

Hiebei haben wir es mit einer Gleichung zu thun, in welcher die unbekannte Gröſse in einer ganzen bejahten Dignität 3 vorkommt. Wollen wir mit Untersuchung jener trigonometrischen Wer-

the eines $(2\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}$ ebenfalls in solche bekannte Regionen uns versetzen; so müssen wir aus der Eulerischen Gleichung die hieher gehörige trigonometrische Gleichung

$$\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\,\mathrm{RR}\,\mathrm{Cos}\,\frac{\varphi}{3} - \frac{1}{4}\,\mathrm{RR}\,\mathrm{Cos}\,\varphi = 0$$

herleiten, und diese in Anspruch nehmen.

Wenn wir nun aber von dieser trigonometrischen Gleichung verlangen, uns den Halbmesser R anzugeben, bei welchem sie der algebraischen Gleichung $x^3 + 0.x + 1 = 0$ congruent zu werden vermögen dürfte: so ist ihre Antwort, dafs sie nur ein $R = 0$ zu verlangen, das heifst, schlechterdings gar nichts dafür zu bestimmen wisse!

§. 25. Man vergesse es nicht, dafs die aufgeführte trigonometrische Gleichung, welche aus der Eulerischen *E) $2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \ldots$ (§. 7.) eben so gut als aus unsrer Gleichung 8) in XVII. §. 36. sich ergibt, zur Beantwortung der vorgelegten Frage schlechterdings einen Halbmesser $R = 0$ verlangt! Nicht etwa einen unmöglichen Halbmesser! Diesen würde sie nur für eine Gleichung $x^3 + Bx \mp C = 0$ verlangen, dessen B bejaht gegeben wäre (XVII. §. 43). Daher auch die Hoffnung vielleicht, vermittelst eines unmöglichen Halbmessers etwas für unsere Aufgabe finden zu können, solchen Gleichungen zugeeignet bleiben mufs; für unsre Gleichung aber, deren $B = 0$, also nicht einmal in Hinsicht seiner Bejahtheit oder Verneintheit bestimmt gegeben ist, ebenfalls völlig eitel und unstatthaft seyn würde!

§. 16. Auch von allen ähnlichen aus Eulers Gleichung folgenden trigonometrischen Gleichungen, wie $\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{4}\right)^4 - RR\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{4}\right)^2 - RRR\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi - 1}{8} = 0$, oder $\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{5}\right)^5 - \frac{5}{4}RR\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{5}\right)^3 + \frac{5}{16}R^4\,\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{5} - \frac{R^4}{16}\mathrm{Cos}\varphi = 0$, ist es gewifs, dafs sie die 4 Wurzeln einer biquadratischen Gleichung, oder die 5 Wurzeln einer Gleichung vom 5ten Grade, nur dann anzugeben vermögen, wenn die vorgegebne Gleichung

$$x^4 + Bx^2 + D = 0$$

oder $x^5 + Bx^3 + Dx + E = 0$

lauter mögliche Wurzeln hat, auch in jeder von diesen Gleichungen sowohl ihr zweites, als ihr viertes Glied vernullt war, um sie mit der für sie zu benutzenden trigonometrischen Gleichung congruirend machen zu können. Denn z. B. der Gleichung $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$ würde die trigonometrische

$$\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{4}\right)^4 - RR\left(\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{4}\right)^2 - RRR\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi - 1}{8} = 0$$

congruirend nicht gemacht werden können, weil in der algebraischen, der Coefficient C zu viel vorkommt.

Der algebraischen Gleichung $x^4 + D = 0$ aber fehlt es ja dergestalt an bestimmenden Coefficienten, dafs die trigonometrische Gleichung einen Halbmesser $= 0$ verlangen müfste; wodurch denn zugleich entschieden seyn würde, dafs sie auch für die, durch den Coefficienten D gegebne Bestimmung irgend etwas zu leisten unfähig seyn müsse!

§. 27. Indem es hiemit vor Augen liegt, warum die eben aufgeführte trigonometrische Gleichung,

welche aus der Eulerischen *E) ihr $n = 4$ und ihr $\varphi = \frac{\varphi}{4}$ gesetzt, sich ergibt, die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 + D = 0$ zu bestimmen schlechterdings nicht geeignet ist; so folgt eben daraus, dafs auch die Eulerische Gleichung diejenigen vier Werthe des $\cos\varphi^{\frac{1}{4}}$, welche die 4 algebraischen Wurzelwerthe $= \sqrt[4]{} \cos\varphi$ ausmachen würden, anzugeben nicht geeignet seyn kann. Denn die verlangten $\sqrt[4]{} \cos\varphi = x$ genannt, müfste ja $\cos\varphi = x^4$, also $x^4 - \cos\phi = 0$ seyn; und so wird ein Calcul, der seiner Natur nach die vier Werthe des x in dieser Gleichung zu bestimmen nicht geeignet ist, auch unfähig seyn müssen, die vier Wurzeln $\sqrt[4]{} \cos\varphi$, also die vier algebraischen Werthe des $(\cos\varphi)^{\frac{1}{4}}$ anzugeben.

§. 28. Da aber nach der Meinung des Herrn Poisson, auch aller übrigen, ebenfalls berühmten Mathematiker, welche nach und mit ihm die Sache bearbeitet haben, diese Unfähigkeit der Eulerischen Gleichung durch die schon erwähnte Verbindung einer convergenten und divergenten Reihe verschuldet seyn soll: so haben sie diese Verbindung vermieden, und mit Hrn. Poisson die beiden Reihen

A) $2^n \cos\varphi^n =$

$$\cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + n_2 \cos(n-4)\varphi + n_3 \cos(n-6)\varphi \ldots$$

$$+ (\sqrt{-1}).[\sin n\phi + \frac{n}{1}\sin(n-2)\phi + n_2 \sin(n-4)\phi + n_3 \sin(n-6)\phi \ldots]$$

und B) $2^n \cos\varphi^n =$

$$\cos n\varphi + \frac{n}{1}\cos(n-2)\varphi + n_2 \cos(n-4)\varphi + n_3 \cos(n-6)\varphi \ldots$$

$$-(\sqrt{-1}).[\sin n\phi + \frac{n}{1}\sin(n-2)\phi + n_2 \sin(n-4)\phi + n_3 \sin(n-6)\phi \ldots$$

in Gebrauch genommen. Vollkommen richtig sind

diese beiden Reihen nicht nur von Hrn. **Poisson**, sondern auch, auf etwas andere Weise, ebenfalls nett und richtig, von Hrn. **Olivier** in des Hrn. **Crelle** Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 1. Hft. 1. 1826, erwiesen; aber in ihrer Ausdeutung hat man sich meines Erachtens sehr geirrt, und dadurch zu mühseligen calculatorischen Arbeiten verleiten lassen, welche irgend etwas wirklich brauchbares nicht einliefern konnten.

§. 29. Durch den Anblick dieser beiden Gleichungen, als

$$2^n \cos\phi^n = \cos n\varphi + n_1 \cos(n-2)\varphi + n_2 \cos(n-4)\varphi + \ldots$$
$$\mp \sqrt{-1}\,.\,[\sin n\varphi + n_1 \sin(n-2)\varphi + n_2 \sin(n-4)\varphi + \ldots]$$

sie geschrieben, und mit der bekannten Lehre der Algebra verbunden, dafs die unmöglichen Gleichungswurzeln, in den gehörig geordneten Gleichungen allemal parweise vorkommen, ist man auf die Meinung gerathen, dafs nun für ein gebrochenes $n = \frac{p}{q}$ der erste Reihentheil, vermittelst seiner Cosinus-Werthe, die möglichen Theile, der zweite Reihentheil, vermittelst seiner Sinuswerthe, die algebraisch unmöglichen Theile der q algebraischen Werthe eines jeden vorgegebnen $(2\cos\phi)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ angeben müsse. Offenbar genug hat man durch diese Meinung sich überzeugt geachtet, und deshalb auch behauptet, dafs namentlich für j e d e s n i c h t g e b r o c h e n e n, weil dann die Potenz $(2\cos\varphi)^n$ nur e i n e n möglichen Werth haben kann, auch die zweite Reihe mit den Sinus sich $=$ o ergeben müsse!

§. 30. Für ganze b e j a h t e n läfst sich diese Behauptung gar leicht erweisen (man braucht nur in der Sinusreihe die Zahl n einmal der ungeraden

Zahl 3, und dann auch der geraden Zahl 4 gleich zu setzen, um sogleich ganz allgemein versichert zu seyn, daſs die eingeklammerte Sinusreihe für jede ganze bejahte Zahl sich $= 0$ ergeben muſs).

Nicht so leicht, heiſst es bei dem anonymen Referenten dieser Arbeiten in der *Zeitschrift für Physik und Mathematik*, *Wien* 1826. *Bd.* 1. *Hft.* 1. *Seite* 101 *), *fällt die Beschaffenheit des erwähnten Ausdruckes in die Augen, wenn* n *eine negative Zahl ist.*

§. 31. Lacroix, der in seinem classichen Werke, *Traité du Calcul différentiel et intégral*, *Tome III*, *Paris* 1816, *page* 605 *etc.*, Hrn. Poisson's Erörterungen beifällig mitgetheilt, hat für die eben erwähnte Behauptung hinzugefügt, daſs sie sich auch für $n = -1$ noch leicht genug bestätigen lasse; indem dafür die eingeklammerte Sinusreihe in die beiden Reihen

$$-(\sin\varphi + \sin 5\varphi + \sin 9\varphi + \text{etc.})$$

und $+(\sin 3\varphi + \sin 7\varphi + \sin 11.\varphi + \text{etc.})$ sich zerlege, auf welche man die bekannte Formel des Hrn. Lexell anwenden könne, durch welche die erste verneinte Reihe $= -\dfrac{\cos(x-2x)}{2\sin 2x}$, die andere bejahte Reihe $= +\dfrac{\cos(3x-2x)}{\sin 2x}$ gefunden wird. Da

---

*) Alles was ich in dieser neuen Zeitschrift bisher durchzulesen veranlaſst gewesen bin, beweiset durch sich selbst, daſs die Verfasser sorgfältig geschrieben haben, und dem Gegenstande gewachsen waren. Da es aber in der jetzigen Fluth von Zeitschriften sehr viel unreifes und nichtsnutziges zu geben pflegt: so ist es sehr natürlich, daſs man auch aus dem Namen des Verfassers auf die Lesenswürdigkeit im Voraus zu muthen wünscht.

nun $\cos - x = \cos x$ ist, so habe man hiemit die Summe der ganzen eingeklammerten Sinusreihe in der Gleichung §. 28. allerdings $= 0$ bestätigt gefunden.

Der erwähnten Formel pflegt es freilich nachgerühmt zu werden, dafs sie die Summirung gewisser Reihen gelehrt habe, an welchen Bernoulli und Euler nicht mit genügendem Erfolge gearbeitet hatten; indessen wird sie immer nur mit mancherlei Umsicht anzuwenden seyn, weil es bei unendlichen *Reihen als solchen nicht* erlaubt ist, ihre negativen Glieder für sich, und ihre positiven Glieder ebenfalls für sich summirt zu haben, und dann aus beider Summe ohne weitere Rücksicht auf die Summe der ganzen Reihe zu schliefsen! Dafs die eben angeführte Anwendung nicht allgemein statthaft ist, wird sich gerade durch den einzelen Fall $n = -1$, am leichtesten erweisen lassen.

Ueberdies aber wird es auch deutlich zu erweisen seyn, dafs die allgemeine Erwartung, die q algebraischen Werthe eines vorgegebnen $(2\cos\varphi)^n$ durch Hrn. Poisson's Formel (§. 29) trigonometrisch bestimmt zu finden, selbst auch für bejahte $= \frac{p}{q}$, nur in äufserst wenigen Fällen wirklich erfüllt werden kann.

Denn sey z. B. $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$ gegeben, also durch die Formel $(2\cos\varphi)^{\frac{1}{3}} =$

$$\cos\frac{\varphi}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)_1 \cos -\frac{5}{3}\varphi + \left(\frac{1}{3}\right)_2 \cos -\frac{11}{3}\varphi + \left(\frac{1}{3}\right)_3 \cos -\frac{17}{3}\varphi + \ldots$$

$$\mp \sqrt{-1}.\left[\sin\frac{\varphi}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)_1 \sin -\frac{5}{3}\varphi + \left(\frac{1}{3}\right)_2 \sin -\frac{11}{3}\varphi \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{3}\right)_3 \sin -\frac{17}{3}\varphi + \ldots\ldots\right]$$

die drei algebraischen Werthe des $(2\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}$ zu finden verlangt: so würde man doch schlechterdings die dreifachen Werthe der Cosinus und Sinus des gedrittelten Bogens $\frac{\varphi}{3}$ dafür zu benutzen suchen, zuvörderst also, und vor allem andern

1) erwarten und verlangen müssen, daſs die Anzahl dieser trigonometrischen Werthe, mit der Anzahl der algebraischen Werthe übereinstimmend, also $= 3$ sey. Dabei aber würde

2) noch zu verlangen seyn, daſs zwei von den drei trigonometrischen Werthen der ersten Cosinusreihe einander völlig gleich sich ergeben, damit jeder von diesen Werthen mit dem $\mp\sqrt{-1}\,.\,\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ den zugehörigen Werth der Sinusreihe bedeutend, verbunden, nicht mehr als 2 unmögliche Wurzeln einliefern könne; und

3) würde noch nothwendig seyn, daſs der übrige dritte Werth der Cosinusreihe, um die eine mögliche Wurzel des $\sqrt[3]{(2\cos\varphi)}$ anzugeben, einem solchen $\frac{\varphi}{3}$ zugehöre, für welches die Sinusreihe $= 0$ sey.

§. 32. Die 1te Forderung kann anders nicht, als durch $\varphi = \pi$ gegeben befriedigt werden; weil ja nur bei $\varphi = \pi$ jeder Cosinus in Poisson's Reihe, dem dortigen ersten, dem $\cos\frac{\pi}{3}$ völlig gleich sich ergeben kann, und völlig gleich sich wirklich ergeben muſs; so daſs seine Formel auf $(2\cos\pi)^{\frac{1}{3}}$ angewandt, in ihrer ersten Reihe die sämmtlichen Cosinus derselben einander völlig gleich, also sämmt-

lich dem $\frac{\pi}{3}$ gleich verlangt, und man demnach diese erste Reihe $= \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ erhält, also in dieser ersten Reihe jener Formel, nur mit den drei verschiednen Werthen des $\cos\frac{180^\circ}{3}$, also (nach §. 2.) mit 1) $\cos 60^\circ$; 2) $\cos(60^\circ + 120^\circ) = \cos 180^\circ$ und 3) noch $\cos(60^\circ + 240^\circ) = \cos 300^\circ = \cos 60^\circ$, also, der 1ten Forderung gemäſs, in dieser Cosinusreihe mit nicht mehr als drei Werthen, 1) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 180^\circ = -1$, und 3) $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, es zu thun hat; durch welche nun, da zwei derselben einander gleich sind, auch der

2ten Forderung Genüge geschieht. Da dann ferner für den übrigen Werth $\cos 180^\circ = -1$ auch der

3ten Forderung, daſs die eingeklammerte Sinusreihe sich $= 0$ ergebe, durch den $\sin 180^\circ = 0$ Genüge geleistet wird, indem für $\varphi = \pi$ die sämmtlichen Sinus in Poissons zweiter Reihe einander gleich, sämmtlich $= \sin\frac{\pi}{3}$ seyn müssen, also dieser zweite Theil der Formel $= (\sqrt{-1}) \cdot \sin\frac{180^\circ}{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ ist, denen $\sin\frac{180^\circ}{3}$ aber, nach der zweiten Tafel in §. 2, die drei Werthe $= 0 = \sin 180^\circ$;

$= \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\sqrt{\frac{3}{4}}$, und

$= \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = +\sqrt{\frac{3}{4}}$ zukommen: so erhellet nun allerdings, daſs *bei diesem Beispiele* Hrn. Poissons Formel zutrifft, um durch ihre trigonometrischen dreifachen Werthe auch gerade die drei

algebraischen Wurzelwerthe des $\sqrt[3]{(2\cos\pi)}$ zu bestimmen.

§. 33. Aus den Beziehungen zwischen den Cosinus und den Sinus eines gedrittelten Winkels $\frac{\varphi}{3}$ es noch genauer darzulegen, warum für ein vorgegebnes $(\cos 2\pi)^{\frac{1}{3}}$ Hrn. Poissons Formel die drei algebraischen Werthe dieses trigonometrischen Ausdruckes allerdings angeben mufs, weil hier zugleich mit Erfüllung der 1ten Forderung in §. 31. auch die beiden übrigen Forderungen müssen geleistet seyn, halte ich nicht für nöthig. Desto nöthiger aber war es darzuthun, dafs Hrn. Poissons Formel selbst bei dieser leichten Vorgabe $(2\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}$, die algebraischen drei Werthe lediglich für $\varphi = \pi$ gehörig einzuliefern geeignet sey, indem sich eben dadurch auch einsehen läfst, dafs z. B. für $(2\cos\varphi)^{\frac{1}{4}}$ sogleich die erste nöthige Forderung, dafs die Cosinus-Reihe in Hrn. Poissons Formel nicht mehr als 4 verschiedene Werthe angebe, wiederum nur bei einem $\varphi = \pi$ kann geleistet werden; und nun eben dadurch der e i n z i g e m ö g l i c h e Weg uns an die Hand gegeben ist, wie sich die hier vermeinte sogenannte Lücke in der Analysis könne ausfüllen lassen!

Man wird mir zugestehen, dieses geleistet zu haben, wenn die folgende Aufgabe bündig und allgemein brauchbar gelöset ist; wofür ich folgende neue, oder doch bisher, meines Wissens, nicht deutlich dargestellte Unterscheidung zwischen den sogenannten Wurzeln voranschicken will.

§. 34. Wenn $(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}} = x$ gesetzt wird, und dieses x die sämmtlichen Werthe bedeuten soll, wel-

che statt x gesetzt, der geordneten algebraischen Gleichung $x^q - (2\cos\varphi)^p = 0$ Genüge thun: so ist es allerdings richtig zu sagen, dafs jedes $x = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ jedes x eine qte Wurzel der Zahl $(2\cos\varphi)^p$ seyn müsse; indem ja unter der qten Wurzel einer jeden Zahl, diejenige Gröfse verstanden wird, welche zur qten Potenz erhoben, jene Zahl wieder gibt.

Aber die eine, und gleichsam die erste von diesen q Wurzelgröfsen, ist von den übrigen dadurch zu unterscheiden, dafs man sie durch die arithmetischen Regeln des Wurzelziehens, auf die gegebne Gröfse angewandt, unmittelbar zu finden suchen mufs.

So würde man, wo $x = \sqrt{144}$ zu finden wäre, zuvörderst durch die Regeln des Quadratwurzel-Ziehens, $x = 12$ zu finden, und dann erst vermittelst der algebraischen Gleichungslehre für $xx = 144$ zu schliefsen haben, dafs es auch einen zweiten Wurzelwerth $x = -12$ geben mufs.

Selbst auch bei den unmöglichen Wurzeln $x = \sqrt{-144}$ würde man zuvörderst schliefsen, dafs $x = \sqrt{-144}$ auch $= \sqrt{(144 \cdot -1)} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{-1} = 12 \cdot \sqrt{-1}$ sey, und dann erst für die Gleichung $xx = -144$ zu folgern haben, dafs aufser $x = +12 \cdot \sqrt{-1}$ auch $x = -12 \cdot \sqrt{-1}$ seyn müsse.

Mögen wir auch zur Aufsuchung solcher ersten Wurzel z. B. schon für die cubische, $x = \sqrt[3]{A}$, die Regeln dieser Wurzelziehung, ohne die Hülfe der Logarithmik, zu mühsam finden, und daher benutzen, dafs $\log x = \frac{1}{3}\log A$ seyn mufs: so wird doch auch hiedurch nur diejenige erste Wurzel gefunden, die wir, zur Unterscheidung von den übrigen, etwa die arithmetische nennen können;

indem die beiden übrigen erst, nachdem jene gefunden ist, vermittelst der algebraischen Gleichungslehre, als die beiden übrigen Werthe des x in der kubischen Gleichung $x^3 = A$ gefunden werden. (M. s. oben §. 13.)

Durch den gekrümmten Strich im $\sqrt[q]{}(2\cos\varphi)^p$ wollen wir in der Kürze es angedeutet wissen, daſs wir von den q verschiedenen Werthen eines $x = \sqrt[q]{}(2\cos\varphi)^p$ gerade nur den ersten, arithmetischen wollen verstanden wissen; der übrigens eben so gut, als jeder der übrigen $q-1$ Werthe, allerdings schon eine von den q Gleichungswurzeln in der Gleichung $x^q - (2\cos\varphi)^p = 0$, also auch $x^q = (2\cos\varphi)^p$ ausmachend ist.

§. 35. Da nun selbst auch dann, wenn wir diese q Werthe des x durch die algebraischen Gleichungslehren aufsuchen wollten, jener erste arithmetische Werth desselben, als für sich gefunden, würde vorausgesetzt und gebraucht werden müssen: so kann es uns schlechterdings nicht als etwas mangelhaftes in der folgenden Auflösung vorgeworfen werden, daſs wir, um die sämmtlichen q Werthe dieses x durch Cosinus und Sinus angegeben zu finden, den ersten arithmetischen Werth schon für sich gefunden vorläufig fordern müssen.

Für jeden einzelen Werthfall α des veränderlichen φ würden wir auch

$x = \sqrt[q]{}(2\cos\alpha)^p$, als $= a$ ganz schicklich ansetzen können. Da aber mit dem veränderlichen φ auch der erste arithmetische Werth des x veränderlich ist: so werden wir schicklicher z, als einen der letzten Buchstaben des Alphabetes gebrauchen,

und $x = \sqrt[q]{}(2\cos\varphi)^p = z$ schreiben.

§. 36. *Aufgabe.*

Für eine vorgegebne Gröfse $(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ *mit veränderlichem* φ *und constantem* $\frac{p}{q}$, *die sämmtlichen* q *Werthe des* $x = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ *durch Cosinus- und Sinus-Zahlen ausgedrückt zu finden.*

§. 37. *Auflösung.*

I) Der erste, arithmetisch aufzufindende, von diesen q Werthen heifse $\sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p} = z$, so mufs $x^q - z^q = 0$ seyn, und jeder von den gesuchten q Werthen des x, eine von den q Gleichungswurzeln dieser Gleichung ausmachen. Für die hier folgende Behandlung derselben aber wird es bequemer seyn

als $x^q = z^q$ sie geschrieben zu haben.

II) Um nun zuvörderst für die q-fache Mannigfaltigkeit der algebraischen Werthe des x, auch eine ebenfalls q-fache Mannigfaltigkeit von Cosinus- und Sinus-Gröfsen herbei gebracht zu wissen, müssen wir, ξ einen noch zu bestimmenden Winkel oder Kreisbogen bedeutend,

$$x = z\left(\cos\frac{\xi}{q} + \sin\frac{\xi}{q}\sqrt{-1}\right) \text{ ansetzen;}$$

indem wir aus den Tafeln §. 2. es abnehmen können, dafs nur ein solcher Bogen, der als der qte Theil eines andern Bogens betrachtet wird, eben dadurch auch gerade q verschiedene Cosinus, und q verschiedene Sinus gewähren wird.

III) Da aber einer von diesen q Werthen des x den arithmetischen Werth $x = z$ ausmachen mufs: so erhellet hiemit die Nothwendigkeit, für ξ ei-

nen solchen Bogen anzunehmen, daſs einer von den q verschiedenen Cosinus $\cos\frac{\xi}{q}$ ein $= 1$, und der dazu gehörige $\sin\frac{\xi}{q}$, ein $= 0$ sey, damit einer von den q Werthen des x

$$\text{als } = z\left(\cos\frac{\xi}{q} + \sin\frac{\xi}{q}\sqrt{-1}\right) = z\,(1+0) = z \text{ sich}$$

ergebe.

Da nun ferner aus der allgemeinen Gleichung

$$x = z\left(\cos\frac{\xi}{q} + \sin\frac{\xi}{q}\sqrt{-1}\right) \text{ folgt,}$$

daſs $x^q = z^q\left(\cos\frac{\xi}{q} + \sin\frac{\xi}{q}\sqrt{-1}\right)^q$, also nach Moivre's Potenziirungsregel
auch $x^q = z^q(\cos\xi + \sin\xi.\sqrt{-1})$ seyn muſs: so erhellet hiemit, daſs wir, um bei allen q Werthen des x, auch

$$\text{allemal } x^q = z^q \text{ zu erhalten,}$$

also dieser Gleichung durch jeden von den q Werthen des x Genüge geleistet zu sehen, dem Bogen $\frac{\xi}{q}$ einen von denjenigen Werthen geben müssen, bei welchen

$$\text{auch } \cos q.\frac{\xi}{q} = 1 \text{ und } \sin q.\frac{\xi}{q} = 0 \text{ ist.}$$

IV) Diese Werthe sind nun keine anderen, als $\frac{\xi}{q} = 0$ oder $\frac{\xi}{q} = \mp 2\pi$, oder $\xi = + g.2\pi$, hierin g jede ganze Zahl bedeutend.

Da es aber nach §. 2. ohne Nutzen ist, auch die negativen ganzen Umkreise mit aufzuführen, und ebenfalls ohne allen Nutzen seyn würde, für die-

se $\frac{\xi}{q}$ auch unter denen Bogen zu wählen, welche über den einfachen Umkreis $= 2\pi$ hinausgehen: so bleibt uns nur noch zwischen $\frac{\xi}{q} = 0$ und $\frac{\xi}{q} = 2\pi$ zu wählen übrig. Wir wählen $\frac{\xi}{q} = 0$, weil durch diesen einfachsten Werth, überdies auch die Schicklichkeit gewonnen wird, daſs von den q Werthen, welche nach den Tafeln §. 2. sich ergeben werden, gerade der erste das arithmetisch zu findende $z = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ ausmacht.

Denn da $\frac{\xi}{q} = 0$ gewählt, auch $\xi = q.0 = 0$ seyn muſs, so werden sich, dieses $\xi = 0$ statt des φ in jenen Tafeln gedacht, der Ordnung nach folgende q Werthe des x ergeben.

$$\text{1tens, } x = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}.\left[\cos\frac{0}{q} + \sin\frac{0}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$= \quad \text{''} \quad .\left[1 \quad + \quad\right]$$

$$\text{2tens, } x = \quad \text{''} \quad .\left[\cos\frac{0+2\pi}{q} + \sin\frac{0+2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$= \quad \text{''} \quad .\left[\cos\frac{2\pi}{q} + \sin 1.\frac{2\pi}{q}.\sqrt{-1}\right]$$

$$\text{3tens, } x = \quad \text{''} \quad .\left[\cos 2.\frac{2\pi}{q} + \sin 2.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$(n+1)\text{tens, } x = \quad \text{''} \quad .\left[\cos n.\frac{2\pi}{q} + \sin n.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$\text{qtens, } x = \quad \text{''} \quad .\left[\cos(q-1).\frac{2\pi}{q} + \sin(q-1).\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

V) Daſs nun durch diese q Cosinus- und Sinuswerthe, mit Hülfe des gemeinschaftlichen Faktors $z = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ gerade die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^q = z^q$, also auch der Gleichung $x^q - z^q = 0$ müssen angegeben werden, ist uns völlig gewiſs; da es nicht nur durch Moivre's Lehrsatz schon erwiesen ist, daſs jeder von diesen q Werthen, statt x gesetzt, dieser Gleichung $x^q - z^q = 0$ Genüge thun muſs; sondern aus den beiden Tafeln §. 2. auch vor Augen liegt, daſs es mehr als diese q Werthe nicht geben kann; und auch über die richtige Combinirung der Cosinus- und Sinuswerthe keine Zweifel uns entstehen können, weil ja für den hier gebrauchten Fall der Tafeln, da wir nämlich ihr $\varphi = \xi = 0$ gesetzt haben, es einleuchtend ist, daſs gerade eben diejenigen q Bogen, welche die q verschiedenen Cosinus angeben, auch diejenigen q Bogen sind, welchen die q verschiedenen Sinus zukommen.

§. 38. *Beispiel* 1.

Die allgemeinen Werthe der $x = (2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ unter No. IV) der Auflösung, auf den einzelen Fall $x = (2\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}$ eingeschränkt,

geben uns,

$$1\text{tens},\ x = \sqrt[3]{(2\cos\varphi)^2}.\left[\cos\frac{0}{3} + \sin\frac{0}{3}\sqrt{-1}\right]$$

$$= \quad , \quad .\left[\ 1 + 0\ \right]$$

$$2\text{tens},\ x = \quad , \quad .\left[\cos\frac{0+2\pi}{3} + \sin\frac{0+2\pi}{3}\sqrt{-1}\right]$$

$$= \quad , \quad .\left[\cos 120^\circ + \sin 120^\circ.\sqrt{-1}\right]$$

$$= \quad , \quad .\left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}}.\sqrt{-1}\right]$$

$$3\text{tens},\ x = \quad , \quad .\left[\cos 240^\circ + \sin 240^\circ.\sqrt{-1}\right]$$

$$= \quad , \quad .\left[-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}.\sqrt{-1}\right]$$

womit die drei Werthe des x,

als $x = \sqrt[3]{(2\cos\varphi)}.1$ und $x = \sqrt[3]{(2\cos\varphi)}.\left[-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}\right]$

vollkommen richtig gefunden sind.

§. 39. *Beispiel* 2.

Das allgemeine φ des vorigen Beispiels auf $\varphi = \pi$ eingeschränkt, erhalten wir die drei Werthe des

$x = (2\cos\pi)^{\frac{1}{3}}$

als $x = \sqrt[3]{(2\cos\pi)}.1$ und $x = \sqrt[3]{(2\cos\pi)}\left[-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}\right]$

also $x = (\sqrt[3]{-2}).1$ und $x = (\sqrt[3]{-2})\ .\ \left[-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}\right]$

Zusätze zur obigen Auflösung.

§. 40. In unserer obigen Auflösung sind, durch die gehörigen Cosinus und Sinus, diejenigen q Faktoren bestimmt worden, von denen der erste, allemal $= 1$, in die arithmetisch aufzufindende Wurzel $\sqrt[q]{(2\cos\phi)^p}$ multiplicirt, diese Wurzel selbst, und jeder von den übrigen $(q-1)$ bestimmten Factoren, in dieselbe arithmetische Wurzel multiplicirt, die übrigen $(q-1)$ algebraischen Werthe des vorgegebnen $(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ richtig angibt; so dafs diese durch unsere Auflösung bestimmten q Factoren lediglich von dem vorgegebnen q abhängig sind, für alle $(2\cos\varphi)^p$ aber durchaus einerlei bleiben, und die verschiedenen Fälle, dafs $\cos\varphi$ bejaht oder verneint, auch p bald bejaht bald verneint gegeben seyn mag, auf unsere Auflösung gar keinen weiteren Einflufs zu haben brauchen, indem wir allen diesen Verschiedenheiten, durch die arithmetische Wurzel Genüge thun, und die eingeklammerten Bogen-Factoren unverändert beibehalten können; wozu indessen nöthig ist, ein bejahtes q beizubehalten, und daher ein vorgegebnes $(2\cos\varphi)^{\frac{p}{-q}}$ als ein $(2\cos\varphi)^{\frac{-p}{+q}}$ zu behandeln.

§. 41. Gesetzt aber, wir wollen ein vorgegebnes $x = (2\cos\varphi)^{\frac{p}{-q}}$ als ein $x = (2\cos\varphi)^{\frac{+p}{-q}}$ behandelt wissen: so würde der erste arithmetisch zu findende Werth des x ein $z = \sqrt[-q]{(2\cos\varphi)^p}$ seyn, und durch Verfolgung der Schlüsse in No. I, II, III und IV der obigen Auflösung, sich ergeben, dafs die

sämmtlichen Werthe des x folgende seyn müssen:

$$1\text{tens}, x = \sqrt[(-q)]{(2\cos\varphi)^p}.\left[\cos\frac{0}{-q} + \sin\frac{0}{-q}\sqrt{-1}\right]$$

$$= \quad „ \quad .\left[\cos\frac{0}{q} - \sin\frac{0}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$2\text{tens}, x = \quad „ \quad .\left[\cos 1.\frac{2\pi}{-q} + \sin 1.\frac{2\pi}{-q}\sqrt{-1}\right]$$

$$= \quad „ \quad .\left[\cos 1.\frac{2\pi}{q} - \sin 1.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$3\text{tens}, x = \quad „ \quad .\left[\cos 2.\frac{2\pi}{q} - \sin 2.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$(n+1)\text{tens}, x = \quad „ \quad .\left[\cos n.\frac{2\pi}{q} - \sin n.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$q\text{tens}, x = \quad „ \quad .\left[\cos(q-1).\frac{2\pi}{q} - \sin(q-1)\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

Hier mußten allerdings die eingeklammerten q Zahlenwerthe, mit denen die arithmetische Wurzel zu multipliciren ist, von denen in §. 37. No. IV) aufgeführten verschieden ausfallen: weil ja diese Werthe von der Größe q allerdings abhängig sind, welches dort bejaht angenommen war, hier aber verneint seyn sollte;

jeder $+\sin n.\frac{2\pi}{-q}$ aber $= -\sin n\frac{2\pi}{q}$ ist;

nur jeder $\cos n.\frac{2\pi}{-q}$ auch $= \cos n.\frac{2\pi}{q}$ bleibt.

§. 42. Auch die beiden Fälle, da von uns 1) für ein vorgegebnes $+(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ und 2) für ein vorgegebnes $-(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ die q verschiedenen Werthe dieser beiden Größen zu finden verlangt würde, können wir als solche betrachten, deren q einerlei bleibt,

und daher, durch einerlei eingeklammerte Factoren bei zwei verschiedenen arithmetischen Wurzelwerthen bestimmt werden können.

Da nun jedes $-1.(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ die Gegengröfse von jedem $+1.(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ ist; so muſs auch, den arithmetischen Wurzelwerth des

ersten Falles $+z = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ gesetzt, der arithmetische Wurzelwerth des

zweiten Falles $= -z = -\sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ seyn; und würden daher aus den folgenden q Werthen des $x = +(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$

$$\text{1tens, } x = +\sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}.\left[\cos\frac{0}{q} + \sin\frac{0}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$\text{2tens, } x = \;\;\text{〃}\;\; .\left[\cos 1.\frac{2\pi}{q} + \sin 1.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$\text{3tens, } x = \;\;\text{〃}\;\; .\left[\cos 2.\frac{2\pi}{q} + \sin 2.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$(n+1)\text{tens, } x = \;\;\text{〃}\;\; .\left[\cos n.\frac{2\pi}{q} + \sin n.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$q\text{tens, } x = \;\;\text{〃}\;\; .\left[\cos(q-1).\frac{2\pi}{q} + \sin(q-1).\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

die wir als die q Werthe eines vorgegebnen $+(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ in §. 37. bereits gefunden haben, allerdings auch die q Werthe eines vorgegebnen $-(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ sogleich dadurch zu erhalten seyn, daſs wir statt des Factors $+\sqrt[q]{(2\cos\varphi)^q}$ dessen Gegengröfse $-\sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ gebrauchten, die

eingeklammerten q Factoren aber ungeändert beibehielten.

§. 43. Eben hieraus aber erhellet, daſs die q Werthe eines vorgegebnen $-(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ auch durch folgende Ausdrücke

$$1\text{tens}, x = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}.\left[\cos\pi + \sin\pi\sqrt{-1}\right]$$

$$2\text{tens}, x = \quad " \quad .\left[\cos(\pi+1.\frac{2\pi}{q}) + \sin(\pi+1.\frac{2\pi}{q})\sqrt{-1}\right]$$

$$3\text{tens}, x = \quad " \quad .\left[\cos(\pi+2.\frac{2\pi}{q}) + \sin(\pi+2.\frac{2\pi}{2})\sqrt{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$(n+1)\text{tens}, x = \quad " \quad .\left[\cos(\pi+n.\frac{2\pi}{q}) + \sin(\pi+n.\frac{2\pi}{q})\sqrt{-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$q\text{tens}, x = \quad " \quad .\left[\cos(\pi+(q-1).\frac{2\pi}{q}) + \sin(\pi+(q-1).\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

vollkommen richtig angegeben werden; indem hier die arithmetische Wurzel unverändert, wie in den Ausdrücken des vorigen §en, beibehalten ist, jeder von den eingeklammerten Factoren aber die Gegengröſse des dortigen ausmacht.

Denn in unserm hier aufgeführten (n+1)ten Ausdrucke haben wir das erste Glied $\cos(\pi + n.\frac{2\pi}{q})$, welches (nach der Formel $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$ in Vorerinner. X. §. 1.)

$$= \cos\pi.\cos n.\frac{2\pi}{q} - \sin\pi.\sin n.\frac{2\pi}{q} = -1.\cos n.\frac{2\pi}{q} - 0$$

seyn, also die Gegengröſse vom ersten Gliede im (n+1)ten Ausdrucke des §. 42 ausmachen muſs.

Das zweite Glied im hiesigen (n+1)ten Ausdrucke ist $\sin(\pi + n.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1})$, welches (nach der Formel $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$.)

$$= \sin\pi.\cos(n.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}) + \cos\pi.\sin n.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1})$$

$$= 0 - 1.\sin n.\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1},$$

also ebenfalls die Gegengröſse des zweiten Gliedes im (n+1)ten Ausdrucke des §. 42. ist.

§. 44. Allenthalben aber, wo wir einen (n+1)ten Ausdruck aufgeführt haben, kann derselbe als der allgemeine Ausdruck aller q Werthe dergestalt betrachtet werden, daſs er für alle diese Werthe leistet, was man von dem so genannten allgemeinen Gliede einer Reihe für die sämmtlichen Glieder geleistet verlangt; indem wir ja in einem solchen (n+1)ten Ausdrucke nur dessen n zuvörderst = 0, dann = 1, dann = 2, und zuletzt = q − 1 zu setzen haben, um sogleich den 1ten, den 2ten, den 3ten Werth, und zuletzt auch den q ten Werth des x dargestellt zu erhalten.

§. 45. Eben dadurch ist nun auch solcher (n+1)ter Ausdruck sehr geschickt, um uns allgemein zu überzeugen, daſs jeder von den aufgeführten q Werthen des x richtig aufgeführt sey, wenn es bei dem (n+1)ten Ausdrucke erweisbar ist, daſs er zur q ten Dignität erhoben, diejenige vorgegebne Gröſse giebt, deren q verschiedene algebraische Werthe man angegeben zu wissen verlangt hatte. Z. B. Da in §. 43. der (n+1)te Ausdruck

$$x = \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}.\left[\cos(\pi + n.\frac{2\pi}{q}) + \sin(\pi + n.\frac{2\pi}{q}).\sqrt{-1}\right]$$

zur q ten Dignität erhoben,

$$x^q = (2\cos\varphi)^p.\left[\cos\left(\pi + n.\frac{2\pi}{q}\right) + \sin\left(\pi + n.\frac{2\pi}{q}\right).\sqrt{-1}\right]^q$$

nach Moivre's Potenziirungsregel also

$$x^q = (2\cos\varphi)^p.[\cos(q\pi + n.2\pi) + \sin(q\pi + n.2\pi).\sqrt{-1}]$$

das ist $= (2\cos\varphi)^p.[\cos q\pi]$ sich ergibt: so haben wir

$x^q = -1.(2\cos\varphi)^p$, wenn q eine ungerade,

und $x^q = +1.(2\cos\varphi)^p$, wenn q eine gerade ganze Zahl ist. An ganze Zahlen brauchen wir nämlich hier nur zu denken, weil bei jedem vorgegebnen $n = \frac{p}{q}$ verlangt werden kann, und muſs, daſs der Zähler und der Nenner eine ganze Zahl sey.

§. 46. Es ist nützlich, durch unsere obige Darstellung überzeugt zu seyn, daſs nicht nur für alle durch das $\mp$ der Stammgröſse und der Dignität $\frac{p}{q}$ verschiedene Fälle eines vorgegebnen $+(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$, die q verschiedenen Werthe desselben, durch einerlei eingeklammerte Factoren bestimmbar sind, sondern auch durch dieselben Factoren die q verschiedenen Werthe des vorgegebnen $-(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ bestimmt werden können, wenn man hier ein $-\sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$, statt der vorhin gebrauchten arithmetischen Wurzel $+\sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ geschrieben hat.

Eben so nützlich und lehrreich aber ist es allerdings, auch zu wissen, daſs man die sämmtlichen q Werthe eines vorgegebnen $-(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ ebenfalls richtig ausgedrückt erhält, wenn man statt der arithmetischen Wurzel, wie bei gegebnen $+(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ ebenfalls $+\sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ anschreibt, statt der vorigen

eingeklammerten Factoren, aber dann die Factoren nach §. 43. ansetzt.

Gerade auf diese letzteren Ausdrücke würden wir unmittelbar kommen, wenn wir für die Auflösung in §. 37. sogleich ein $-(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ gegeben annehmen; indem wir dann finden, daſs wir statt der dortigen Gleichung $x^q = z^q$ nunmehr mit der Gleichung $x^q = -z^q$ es zu thun haben, und eben deshalb nicht, wie dort, $\frac{\xi}{q} = 0$, sondern $\frac{\xi}{q} = \pi$ annehmen müssen; wodurch dann die eingeklammerten Factoren gerade wie in §. 43. sich ergeben.

§. 47. Da jeder von uns aufgeführte (n+1)te Ausdruck, eine allgemeine Darstellung der sämmtlichen q verschiedenen Werthe des x ausmacht, indem man nur das n desselben $= 0$, oder $= 1$, oder $= 2$, und s. w. bis zum $= q - 1$ hin anzusetzen braucht, um der Ordnung nach den 1ten, den 2ten, den 3ten u. s. w. zuletzt auch den qten Ausdruck dieser verschiedenen q Werthe zu erhalten: so können wir nun in der Kürze ausdrücken, was wir bisher gefunden haben, daſs nämlich allerdings

für jedes vorgegebne $\mp(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ von den q verschiedenen Werthe desselben ihr (n+1)ter Ausdruck der q verschiedenen x

$$\text{als } x = \mp z.\left[\cos n\frac{2\pi}{q} + \sin n\frac{2\pi}{q}\sqrt{-1}\right]$$

angegeben, und $\mp z = \mp \sqrt[q]{(2\cos\varphi)^p}$ bedeutend, vollkommen richtig ist, auch eben dieses den (n+1)ten Ausdruck der q verschiedenen Werthe des x in der Gleichung $x^q = \pm z^q$, also auch der Gleichung $x^q \mp z^q = 0$ ausmachen muſs;

dafs aber überdies auch für ein vorgegebnes $+(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ der (n+1)te Ausdruck für dessen q verschiedne Werthe, wie vorhin

als $x = z\left[\cos\left(n\frac{2\pi}{q}\right) + \sin\left(n\frac{2\pi}{q}\right)\sqrt{-1}\right]$ angesetzt,

daneben $x = z\left[\cos\left(\pi + n\frac{2\pi}{q}\right) + \sin\left(\pi + n\frac{2\pi}{q}\right)\sqrt{-1}\right]$

den (n+1)ten Ausdruck für die q verschiedenen Werthe eines vorgegebnen $-(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$ ebenfalls richtig angibt; und somit der erste von diesen Ausdrücken

für die Gleichung $x^q = z^q$, also auch $x^q - z^q = 0$,

der andere von diesen Ausdrücken dagegen

für die Gleichung $x^q = -z^q$, also auch $x^q + z^q = 0$

geeignet ist.

§. 48. Da wir nun aus den Gleichungen $x^q \mp z^q = 0$ auf die Gleichungen $\frac{x^q}{z^q} \mp 1 = 0$, also $y = \frac{x}{z}$ bedeutend, auch auf $y^q \mp 1 = 0$ schliefsen können, aus den beiden vorhin angeführten (n+1)ten Ausdrücken des x aber

zuvörderst $y = \frac{x}{z} = 1.\left[\cos n\frac{2\pi}{q}\right) + \sin\left(n\frac{2\pi}{q}\right)\sqrt{-1}\right]$

und daneben $y = \frac{x}{z} = 1.[\cos(\pi + n\frac{2\pi}{q}) + \sin(\pi + \frac{2\pi}{q})\sqrt{-1}]$

erhalten: so haben wir hiemit gefunden, dafs für die q Werthe des y

in der Gleichung $y^q - 1 = 0$

der (n+1)te Ausdruck $y = \cos\left(n\frac{2\pi}{q}\right) + \sin\left(n\frac{2\pi}{q}\right)\sqrt{-1}$

und daneben für die q Werthe des y

in der Gleichung $y^q + 1 = 0$

der (n+1)te Ausdruck $y = \cos(\pi + n\frac{2\pi}{q}) + \sin \pi + \frac{2\pi}{q}) \sqrt{-1}$

ausmachen muſs.

§. 49. Sobald man für die Gleichung $y^q \mp 1 = 0$ ihre q Wurzelwerthe gefunden hat, so weiſs man auch die q einfachen Factoren des Aggregates $y^q \mp 1$ anzugeben; und umgekehrt, weiſs man aus den q einfachen Factoren dieses Aggregates sogleich auf die q Wurzelwerthe der Gleichung $y^q \mp 1 = 0$ zu schlieſsen. Da man nun schon lange (mit Cotesius) es gelehrt hat, wie die q einfachen Factoren des Aggregates $x^q \mp a^q$ zu finden sind, also auch die q Werthe des x in der Gleichung $x^q \mp a^q = 0$, und somit auch die q Werthe des $y = \frac{x}{a}$ in der Gleichung $y^q \mp 1 = 0$ würde anzugeben gewuſst haben: so konnte ich eigentlich nicht viel neues zu erfinden haben, um die neue Aufgbe in §. 51. gelöset zu wissen! Wenn es indessen von Anfang an so ganz leicht zu durchchauen gewesen wäre, nicht nur, wie diese neue Aufgabe auf jene alte zurück gebracht werden kann, sondern auch, warum sie gerade auf diese nothwendig zurück gebracht werden muſs: so würden nicht seit 1811 her so manche sehr geübte Mathematiker andere, nicht schickliche Wege dazu versucht, und mit vielem Zeitaufwande vergebens bearbeitet haben.

§. 50. Nach demjenigen, was ich von diesen Arbeiten theils selbst gesehen, theils referirt vorgefunden habe, ist ihre Hauptabsicht gewesen, aus den sämmtlichen Werthen, welche durch Hrn. Pois-

son's Gleichung

$$2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n_1 \cos(n-2)\varphi + n_2 \cos(n-4)\varphi + \ldots$$
$$\mp \sqrt{-1}.\,[\sin n\varphi + n_1 \sin(n-2)\varphi + n_2 \cos(n-4)\varphi + \ldots]$$

für $2^n \cos\varphi^n$ angegeben werden, und deren Anzahl bei gegebnem $n = \frac{\mp p}{q}$, einige äusserst wenige Werthfälle des φ ausgenommen, wie wir oben gesehen haben, übrigens in den meisten Fällen eine wahre Unzahl von Werthen ausmacht, diejenigen heraus zu finden, welche, indem sie theils durch die Cosinus- theils durch die Sinusreihe sich ergeben müssen, dann auch einer solchen Combination fähig seyen, dafs man endlich die q verschiedenen algebraischen Werthe des vorgegebnen $(2\cos\varphi)^{\pm\frac{p}{q}}$ wirklich herausgebracht habe.

§. 51. Schon deshalb, weil die Anzahl der Cosinus- und Sinus-Werthe in den mehresten Fällen nicht nur unendlich grofs, sondern in sehr vielen Fällen sogar ihre Systematisirung unendlich viele Klassen erfordern würde, und eben dieses dann auch von den Klassen der Combinirung gesagt werden könnte; werde ich wohl nicht zu stark mich ausdrücken, wenn ich behaupte, dafs man mit diesen Arbeiten unternommen habe, einen Mohren zu waschen. Ueberdies aber ist ja die Mannigfaltigkeit der Cosinus- und Sinus-Werthe, und die Mannigfaltigkeit der algebraischen Wurzelwerthe dergestalt verschieden begründet, dafs in einigen Fällen, selbst auch unter den unendlichen vielen Cosinus- und Sinus-Werthen, einige der algebraischen Wurzelwerthe gar nicht vorkommen mögen.

§. 52. Trigonometrische Richtigkeit habe ich der Gleichung des Hrn. Poisson schon in §. 28

sogleich zugestanden. Ob sie für den Winkelcalcul einigen Nutzen haben könne, ist eine andere Frage! Für den Eulerischen Winkelcalcul kann sie nicht benutzt werden, weil sie der Sinusreihe nicht entledigt ist. Für andern Winkelcalcul auch nicht eher, als bis man sieht, wie sie ihrer imaginairen Gröfse in der Anwendung könne entledigt werden. Aber selbst auch bei ihrer Anwendung auf die algebraischen Wurzelwerthe, denen zu Gefallen die Sinusreihe mit dem Factor $\mp\sqrt{-1}$. zu Hülfe genommen ist, hat man sich ja nach obigem §. 30. in einigen Fällen, wo die algebraischen Wurzeln einer solchen Unmöglichkeit nicht unterworfen sind, dieser Unmöglichkeiten durch richtige Schlüsse nicht zu entledigen gewufst. In Hinsicht dieser Entledigung wird es nöthig seyn, noch zweier Erörterungen zu erwähnen, von denen die eine dem Hrn. Lacroix selbst zugehörig, die andere doch von ihm selbst auch der öffentlichen Ausstellung werth geachtet ist.

§. 53. Hr. Lacroix hat, wie es schon oben von mir erwähnt ist, des Hrn. Poisson Erörterung über den Eulerischen Winkelcalcul mit vielem Beifalle angezeigt, auch noch hinzugefügt, dafs die von Hrn. Poisson gerügte Unrichtigkeit der Eulerischen Formel so lange unbemerkt habe bleiben können, weil man die Entwickelungen der $\cos x^n$ und $\sin x^n$ niemals anders als für ganze bejahte n anzuwenden nöthig gehabt habe *).

---

*) Hiebei werden mehre meiner Zuhörer an mich zurück zu denken veranlafst seyn, wenn sie mir neuer Quartanten voll mühseliger calculatorischer Entwickelungen erwähnten, und ich sie versicherte, dafs sie als künftige Praktiker damit ihre kostbare Zeit nicht vergeuden müfsten, sondern dergleichen, für die Anwendung sehr entbehrliche Untersuchungen denjenigen zu überlassen

Nach Seite 616 im *Vol. III.* des *Traité du Calcul différ. et integrale* war Er indessen darauf gefallen, Hrn. Poisson's Gleichung gewissen allgemeinen Lehrsätzen der Differential- und Integralrechnung zu unterwerfen, wobei sich (wider alles mein Vermuthen, wie ich nachher erörtern werde) Ihm ergab, daſs Hrn. Poisson's Gleichung mit diesen Lehren in Widerspruch gerathe! Seite 620 sagt Er, daſs dieses Ereigniſs immerhin als eins von denen Paradoxen müsse aufgestellt werden, welche einer besondern Erklärung bedürftig seyen. „Man hat oft dergleichen „vorgefunden, die am Ende sehr glücklich beantwor-„tet sind. Vielleicht, daſs dieses auch mit der vor-„liegenden Schwierigkeit bald der Fall ist. Bis da-„hin aber bin ich durch die Natur meines Werkes „verpflichtet, sie nicht mit Stillschweigen zu über-„gehen; und eben deshalb muſs ich auch einige von „Hrn. Deflers darüber mir mitgetheilte Erörterun-„gen hier mit abdrucken lassen.“

§. 54. Des Hrn. Deflers Untersuchung hatte nun offenbar zur Absicht, die Frage, ob die Sinusreihe in des Hrn. Poisson Formel, die Reihe

$$\sin n\varphi + n_1 \sin(n-2)\varphi + n_2 \sin(n-4)\varphi + n_3 \sin(n-6)\varphi + \ldots$$

für alle verneinte n wirklich $=$ o sey, zu prüfen, nachdem Hr. Lacroix (nach unserm obigen §. 31.) bloſs für $n = -1$ diese Vermuthung erwiesen glaubte. In dieser Hinsicht wurde von Hrn. Deflers das allgemeine Glied dieser Reihe entwickelt, und Kraft dieser Entwickelung gefunden, daſs diese Reihe die *Entwickelung einer Function ausmache, welche*

---

wären, welche Zeit und Lust (und in einem sehr reichen Staate vielleicht auch Beruf) dazu hätten, solchen Calcul lediglich um seiner selbst willen zu betreiben.

für jeden Werth des φ, *allemal* = o ist! Da die französischen Mathematiker besonders in dieser Art des Calculs, der Functionen-Entwickelung, sehr geübt sind: so muſs es nicht so ganz leicht seyn, die Fehlschlüsse in dieser Arbeit aufzufinden. Ich finde mich nich aufgelegt, darnach zu suchen: sondern da es wirklich geworden ist, daſs ein achtungswürdiger Mathematiker (*Maître de conférences à l'Ecole Normale*, und welchen Ein Lacroix seiner Mitbeachtung würdigte) für eine so einfache Reihe eine so falsche Summirung erwiesen hat: so sehe ich dieses als ein abermaliges Beispiel an, daſs solche künstliche Entwickelungsgründe gar wohl den Namen der Verwickelungsgründe verdienen.

Hr. Deflers beschlieſst seinen Aufsatz mit der Frage, wie es doch nun zu erklären sey, daſs gleichwohl für $x = \pi$ und $n = \frac{1}{3}$ (man sehe unsern obigen §. 32.) diese Reihe einen angeblichen Werth (einen Werth, der nicht = o ist) annehmen könne? ohne durch dieses Ereigniſs seiner Reihen-Entwickelung den Krieg zu erklären!

§. 55. Wenn ich selbst in jüngeren Jahren gewisse Erfolge des Infinitesimal-Calculs *a priori* durch Begriffs-Entwickelungen des Unendlichen mir nicht deutlich zu machen wuſste, und zu den Erörterungen *a posteriori*, zu den Functions-Entwickelungen meine Zuflucht genommen hatte; und wenn ich dann bei Verfolgung der gröſsten Meister in diesem Fache, durch die öde Arbeit mit dem calculatorischen Mechanismus und dem Formelngedächtnisse, welche hier meistens den Verstand vertreten müssen, ermüdet wurde: so war es eine Erholung für mich, Falls ich hie und da auch auf allgemeine Ueberschauungen

des Calculs, oder gleichsam calculatorisch-philosophische Betrachtungen desselben gerieth.

Zu solchen Betrachtungen gehört es, wenn Hr. Lacroix, nach unserer obigen Erwähnung, Hrn. Poisson's Formel durch allgemeine Lehren der Differential- und Integralrechnung zu prüfen verlangt. Auffallend war es mir dabei sogleich, daß diese Formel, die doch als trigonometrische Formel, nach ihren Gründen evidente Richtigkeit hat, mit jenen Lehren in Widerspruch gerathen solle!

§. 56. Durch eine allgemeine Lehre der Differentialrechnung wird hier behauptet:

wenn $y = (\cos\varphi)^n$, also $y - (\cos\varphi)^n = 0$ ist,

so muſs $\frac{dy}{d\varphi} + n(\cos\varphi)^{n-1}\sin\varphi = 0$

folglich auch $\frac{dy}{d\varphi}\cos\varphi + ny\sin\varphi = 0$ seyn.

Wenn daher, schlieſst man ferner,

$$X = \cos n\varphi + n_1 \cos(n-2)\varphi + n_2 \cos(n-4)\varphi + n_3 \cos(n-6)\varphi + \ldots$$

und $X' = \sin n\varphi + n_1 \sin(n-2)\varphi + n_2 \sin(n-4)\varphi + n_3 \sin(n-6)\varphi + \ldots$

bedeutend, Herr Poison die

Gleichungen $y = (\cos\varphi)^n = \frac{1}{2^n}(X \mp X'\sqrt{-1})$

folglich auch $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{dX}{d\varphi} \mp \frac{dX'}{d\varphi}\sqrt{-1}\right)$ behaupten, also

auch $\frac{dX}{d\varphi}\cos\varphi \mp \frac{dX'}{d\varphi}\sqrt{-1}.\cos\varphi + nX\sin\varphi \mp nX'\sqrt{-1}.\sin\varphi = 0$

behaupten will: so müssen von ihm, da mögliche und unmögliche Gröſsen einander nicht vernullen

können, auch die

beiden Gleichungen, 1) $\frac{dX}{d\varphi}\cos\varphi + nX\sin\varphi = 0$

und 2) $\mp\frac{dX'}{d\varphi}\cos\varphi \mp nX'\sin\varphi = 0$

zugegeben werden, die nun ihrer beiderseitigen Constante wegen, mit einer allgemeinen Lehre der Integralrechnung nicht verträglich seyen.

§. 57. Gegen diese Schlufsfolge würde Hr. Poisson, meines Erachtens, erinnern können, dafs sie eine *petitionem principii* in sich habe. Denn wenn die Formel $(2\cos\varphi)^n = X \mp X'\sqrt{-1}$, dadurch sachfällig werden soll, weil in ihrem Differentialquotienten der unmögliche Theil $\frac{dX'}{d\varphi}\sqrt{-1}$ an sich selbst ein $= 0$ ausmachen müfste: so würde ja gegen die Formel selbst, schon vor ihrer Differenziirung, zu behaupten gewesen seyn, dafs sie in zwei Gleichungen, $(2\cos\varphi)^n - X = 0$ und $\mp X'\sqrt{-1} = 0$ zerfallen, also $(2\cos\varphi)^n = X$ und $X' = 0$ seyn müsse, also etwas anders als die Eulerische Gleichung $(2\cos\varphi)^n = 0$ gar nicht seyn könne; da doch Hr. Poisson statt dieser Eulerischen Formel, die seinige $(2\cos\varphi)^n = X \mp X'\sqrt{-1}$ gerade deshalb gebraucht wissen will, weil für gebrochene $n = \frac{p}{q}$, einige von den q verschiedenen algebraischen Werthformen des $(2\cos\varphi)^{\frac{p}{q}}$, aufser einem möglichen Theile auch einen unmöglichen Theil enthalten sollen und müssen!

Es ist ja eine eben so allgemein gewöhnliche, als richtige Behauptung, dafs $x = \Phi^{\frac{p}{q}}$, also $x = \sqrt[q]{\Phi^p}$, nämlich x jede von den q algebraischen Wurzeln des mit Φ veränderlichen Φ^p bedeutend, der

allgemeine Ausdruck dieser x aus einem möglichen und einem unmöglichen Theile bestehen muſs, von welchen der letztere unmögliche, nur für die möglichen Wurzeln sich vernullen, für die übrigen unmöglichen Wurzeln aber eben deshalb vorhanden bleiben muſs, damit der mögliche Theil des x in der linken Seite, mit dem möglichen Theile in dem Ausdrucke der rechten Seite, der unmögliche Theil des x in der linken Seite aber mit dem unmöglichen Theile des Ausdruckes in der rechten Seite vergleichbar sey.

§. 68. Hieraus dürfte sich nun auch ergeben, daſs die hier bezogene allgemeine Lehre der Differentialrechnung nicht so ganz richtig gefaſst sey.

Wenn y und $\mathfrak{y}$, jedes eine Function des x ist, und $y = \mathfrak{y}$ entweder anerkannt ist, oder doch die Bedingungen gesucht werden sollen, unter welchen diese Vergleichung Statt finden könne: so muſs man bedenken, daſs durch die Gleichung zwischen diesen beiden Functionen, ihre Gleichheit bei jedem einzelen Werthfalle des veränderlichen x, zu behaupten ist; folglich auch, statt eines jeden x dessen Werthfall $x + {}'dx$ gesetzt,

die Gleichheit $'dy = {}'d\mathfrak{y}$,

und daher die Gleichheit der werdenden Differentialquotienten $\frac{'dy}{'dx} = \frac{'d\mathfrak{y}}{'dx}$, folglich auch der genauen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = \frac{d\mathfrak{y}}{dx}$ zu behaupten ist.

Hiemit liegt vor Augen, daſs diese Gleichung zwischen den Differentialquotienten, aus der Gleichung $y = \mathfrak{y}$ zu folgern ist; diese Gleichung aber voraussetzt, daſs, falls bei einem einzelen Werthfalle des x, der Werth des $\mathfrak{y}$ ein Aggregat aus einer möglichen und unmög-

lichen Gröfse ist, auch der Werthfall des y ein Aggregat aus derselben möglichen und unmöglichen Gröfse seyn mufs.

§. 60. Da wir des Hrn. Poisson Formel gegen diejenige Anwendung der Differentiallehre geschützt haben, durch welche sie mit einer allgemeinen Lehre der Integralrechnung streitig werden sollte: so könnten wir diese letztere dahin gestellt seyn lassen. Indessen dürften folgende Bemerkungen darüber von allgemeinem Nutzen für die Herstellung einer guten Methodik seyn können.

Des Hrn. Lacroix Lehrbücher für die Differential- und Integralrechnung sind mir namentlich auch dadurch sehr lieb geworden, dafs man darin zwar die neue Sprache des Functionencalculs hie und da mit gebraucht sieht, die Begründung seines Infinitesimal-Calculs aber doch meistens aus dem Begriffe der Infinitesimalien unmittelbar abgeleitet wird. Indessen ist es freilich auch der Fall, dafs einige Lehren, die aus dem Begriffe der Sache selbst sehr leicht und evident zu schliefsen wären, durch mühsame Umwege der Reihen-Theorien gefolgert werden. In Hinsicht des Satzes, dafs für das Integral $\int d\cos\varphi^n$ nicht mehr als eine Integralconstante Statt finden kann, wird a. a. O. auf No. 102. Vol. I. verwiesen; wo die Function $\cos\varphi^u$ nach Lagrange einer Reihen-Entwickelung, sogar vermittelst der (hypothetischen) Methode der unbestimmten Coefficienten (welche hier vielen Bedenklichkeiten blos gestellt werden könnte) unterworfen ist.

§. 61. Welche mühselige, und keineswegs als allgemein gültig erwiesene Umwege werden dabei begangen, wenn man bei solchen Erweisen genau genommen voraussetzt, dafs jede Function etwa der

Taylorschen Reihe, oder der Methode der unbestimmten Coefficienten, auch wohl zuvor schon einer sogenannten allgemeinen Entwickelungsreihe unterworfen, und nach deiser behandelt sey!

Und möchte man doch bedenken, daſs auf diese Weise alle Functionen, sie mögen algebraisch, oder logarithmisch, oder sonst geartet seyn, wie sie wollen, allesammt als völlig gleichartig behandelt werden, eben dadurch also, wie man auch in mehren Lehrbüchern es leicht bemerken wird, der so wesentliche Unterschied zwischen den Constanten eines algebraischen, und eines logarithmischen Integrales, so gut als völlig unbeachtet bleibt!

§. 62. Gesetzt Hr. Poisson wäre durch jene Lehre der Differentialrechnung mit Recht dahin verurtheilt worden, daſs er wegen des von ihm behaupteten $(2\cos\varphi)^n = X + X'\sqrt{-1}$, auch die beiden Gleichungen 1) und 2) in §. 56,

nämlich $\frac{dX}{d\varphi}\cos\varphi + nX'\sin\varphi = 0$

und $\frac{dX'}{d\varphi}\cos\varphi + nX'\sin\varphi = 0$ hätte zugestehen müssen: so würde er damit auch die Gleichung $\frac{dX}{X} = \frac{dX'}{X'}$, das ist, $d\log X = d\log X'$ behaupten müssen.

Durch die obige Reihen-Entwickelung nach Lagrange wird es aller Beachtung entrückt, daſs man es hier ursprünglich mit zwei logarithmischen Differentialen, folglich auch mit zwei logarithmischen Integrirungen zu thun habe.

§. 63. Wenn wir dagegen, zufolge unserer Erinnerung in Cap. I. §. 30., bedenken, daſs eigent-

lich jeder Integrirung für sich eine Constante zukommt, auch nach Cap. IX. §. 10 es bedenken, dass bei diesen logarithmischen Integrirungen schon zwei constante Factoren eintreten, und uns $AX = A'X'$ schon geben müssen, ehe noch von der constanten Anfangsgränze die Rede gewesen ist: so haben wir in dieser letzten Hinsicht noch nach einer dritten Constante C in der Gleichung $AX = A'X' + C$ zu fragen.

Da nun X sowohl als X' mit $\varphi = 0$ seinen Anfang nehmen soll, für $\varphi = 0$ aber $X = 1$ und $X' = 0$ ist: so hat man $A.1 = A'.0 + C$, also $C = A$, und somit $AX = A'X' + A$. Indem dann dieser Gleichung gemäss, $\frac{A'}{A} = \frac{X-1}{X'}$, also ein constantes Verhältniss, $A:A'$, zugleich ein veränderliches, $X':X-1$, seyn müsste: so ist hier allerdings vermittelst der Constanten es erwiesen, dass die Gleichung etwas sich selbst widersprechendes verlangen muss.

§. 64. Aber dieser Widerspruch mit sich selbst liegt ja in der Gleichung $X = X'$ schon vor Augen, ohne dass man ihre drei Constanten, A, A' und C, dafür in Betrachtung zu ziehen braucht!

Nimmt man ferner die gewöhnliche Constanten-Lehre zu Hülfe, ohne zwischen diesen drei Constanten zu unterscheiden, schliesst also bloss, dass aus der Differentialgleichung $\frac{dX}{X} = \frac{dX'}{X'}$ die Integralgleichung $\log X = \log X' + \log C$, also $X = CX'$ folgt, und daher die Constante $C = \frac{1}{0}$ seyn müsse: so hat man sogleich diese falsche Constante gefunden, wie sie von Herrn Lacroix durch andere umständlichere Schlüsse a. a. O. gefunden ist.

Wir haben dagegen nur das Constanten-Verhältniſs $\frac{A'}{A} = \frac{X - 1}{X'}$ gefunden; und können uns hieraus vermittelst des einzelen Werthfalles $\varphi = 0$ etwa auf $\frac{A'}{A} = \frac{0 - 1}{1} = - 1$ zu schlieſsen, aus zwei Gründen nicht erlauben:

1) weil ja der einzele Werthfall $\varphi = 0$ von uns schon verbraucht ist, um aus demselben auf unser $C = A$ zu schlieſsen; und

2) weil dieser Werthfall derjenigen Constanten-Bestimmung zugeeignet ist, welche durch die Anfangsgränze der Functionen muſs begründet werden; da hingegen die beiden Factoren A und A' im $\int \frac{dK}{X} = AX$, und $\int \frac{dX'}{X'} = A'X'$, von der Anfangsgränze unabhängig, allen veränderlichen Endgränzen zugehörig sind.

§. 65. Das Gesetz der Integralrechnung, welches Lacroix hier angewandt hat, heiſst bei ihm: *daſs der allgemeinste Werth einer Differentialgleichung von der* n*ten Höhe* (^{n}d) *niemals mehr als* n *willkührliche Constanten enthalten darf* *).

Wird dieses Gesetz erst gefolgert, nachdem man jede Function einer allgemeinen Reihenform unterworfen gedacht hat, so ist durch diese Allgemeinheit, das Eigenthümliche der logarithmischen und der trigonometrischen Integrirung, und s. w. verloren gegangen; da hingegen der richtige Sinn derselben auch von Anfängern nicht verkannt werden kann, wenn

*) *Que la valeur la plus générale qui satisfait à une équation différentielle, ne doit pas contenir un nombre de constantes arbitraires plus grand que l'exposant de l'ordre de cette équation.*

man ihnen gesagt hat, dafs durch jede Integrirungsregel, sie mag die algebraische, oder die trigonometrische, oder irgend eine exponentiale seyn, nur derjenige veränderliche Theil der Integralfunction gefunden wird, welcher, wie das vorgegebne Differential, als solches, allen veränderlichen Endgränzen zugehörig ist; und daher bei jeder Anwendung einer Integrirungsregel überdies auch nach der constanten Anfangsgränze noch gefragt werden mufs; wenn also zweimal oder dreimal integrirt wird, auch zwei- oder dreimal nach einer solchen Constante zu fragen ist, welche durch die Anfangsgränze der Function bestimmt werden kann.

§. 66. So eben erst erhalten wir in Freyberg von des Hrn. *Gergonne Annales de Mathématiques, Février* 1826, und darin S. 254 etc. eine *Note sur l'analyse des sections angulaires.*

Aus Hrn. Poissons Formel $(2\cos\varphi)^n = X + X'\sqrt{-1}$
und $(2\cos\varphi)^n = X - X'\sqrt{-1}$

werden durch Substitutionen, die mir nicht gehörig motivirt scheinen, und durch eine ausgemacht unrichtige Forderung, die beiden Formeln

$$(2\cos\varphi)^n = X\,\frac{(\cos k\pi + \sin k\pi\sqrt{-1})^n}{\cos n k\pi}$$

und $$(2\cos\varphi)^n = -X'\,\frac{(\cos k\pi + \sin k\pi\sqrt{-1})^n}{\sin n k\pi}$$ gefolgert.

„Diese beide Formeln (heifst es dann), die man „als fundamentale betrachten kann, stimmen mit de„nen des Hrn. Poinçot überein, und eignen sich „für alle die Entwickelungen, die von ihm in „seinen *Recherches sur l'analyse des sections angu„laires*, pag. 68, angegeben sind.

Wenn sich das so verhält, so wird unsers Erachtens Hr. Poisson berechtigt seyn, gegen alle diese

Entwickelungen zu protestiren, weil diese beiden Fundamentalformeln von ihm verlangen, dafs in seiner Formel die möglichen Gröfsen für sich, und die unmöglichen ebenfalls für sich allein genommen, $= 0$ gesetzt werden sollen; wogegen er nach unserem obigen §. 57. sich verwahren kann.

Gesetzt, die beiden Fundamentalformeln seyen richtig; wie soll durch sie das Ziel der ganzen Untersuchung erreicht werden, aus diesen Formeln für ein gebrochenes $n = \frac{p}{q}$ die q algebraischen Werthe des $(2 \cos \varphi)^{\frac{p}{q}}$ zu bestimmen!

Aber, wer die Richtigkeit dieser beiden Fundamentalformeln behaupten will, der würde ja auch die Gleichung $\frac{X}{\cos n k \pi} = - \frac{X'}{\sin n k \pi}$, also auch die Gleichung $X \tan g\, n k \pi = - X'$ behaupten müssen!

Neunzehntes Capitel.

Aufstellung einiger logarithmisch-trigonometrisch-imaginairen Ausdrücke.

§. 1.

Da wir z. B. aus §. 3, §. 15 und §. 28 des XVIIten Kapitels bereits wissen, daſs man folgende Gleichungen, $\varphi \cdot 2\sqrt{-1} = \log \frac{1 + \operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}}$,

desgleichen $\varphi \sqrt{-1} = \log(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})$

und $-\varphi \sqrt{-1} = \log(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})$ behaupten kann: so muſs man, h die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutend, nach Diff. R. X. §. 33. auch folgende Gleichungen,

$$h^{\varphi \cdot 2\sqrt{-1}} = \frac{1 + \operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} \varphi \sqrt{-1}},$$

desgleichen $h^{\varphi \sqrt{-1}} = \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}$

und $h^{-\varphi \sqrt{-1}} = \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1}$, folglich

auch $\frac{h^{\varphi \sqrt{-1}} + h^{-\varphi \sqrt{-1}}}{2} = \cos \varphi$,

und $\frac{h^{\varphi \sqrt{-1}} - h^{-\varphi \sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin \varphi$

allerdings behaupten können. Es ist auch gewiſs, daſs solche Darstellungen, in den gehörigen Verbin-

dungen, einen kurzen und netten Calcul gewähren können. In den Betrachtungen des XVIIten Kapitels aber würden sie eine unnöthige Künstelei ausgemacht haben; und oft genug werden seit einiger Zeit dergleichen Ausdrücke dergestalt gebraucht, daſs man sie für eine seltsame und schädliche Liebhaberei erklären möchte.

§. 2. Die Logarithmen, welche eine besondere Gattung der Exponentialgröſsen ausmachen, und die sogenannten trigonometrischen Gröſsen, Sinus, Cosinus, Tangente und s. w. sind von so verschiedener Art, daſs irgend eine allgemeine Abgleichung zwischen einem veränderlichen Logarithmen, und einem veränderlichen Sinus, oder Cosinus, und s. w., durchaus möglich nicht dargestellt werden kann, allerdings aber, zu groſser Bequemlichkeit für einen Calcul, wo man beiderlei Gröſsen im Allgemeinen zu vergleichen nöthig hat, allemal solche Unmöglichkeiten ausmacht, die sich vermittelst des algebraisch unmöglichen $\sqrt{-1}$ ausdrücken lassen, und dadurch bei der wirklichen Anwendung der Formeln, vermittelst der dabei eintretenden algebraischen Operationen, hie und da sich wieder aufheben können.

§. 3. Laſst uns z. B. aus Diff. R. X. §. 33, auch Diff. R. XV. §. 22. No. II und I, benutzen,

daſs $h^{\varphi} = 1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1,..,4} + \frac{\varphi^5}{1,..,5} + \frac{\varphi^6}{1,..,6} + \ldots\ldots$

ist, indem wir die dortige veränderliche Dignität z im h^z, hier durch die Zahl φ eines veränderlichen Kreisbogens ausgedrückt fordern, und laſst uns mit

dieser Gleichung, die beiden folgenden

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1....4} - \frac{\varphi^6}{1....6} + ...$$

und $$\sin\varphi = + \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1....5} - ....$$

vergleichen: so werden wir daraus auf die Gleichung

$$h^\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi = 2\left\{1 + \varphi + \frac{\varphi^4}{1....4} + \frac{\varphi^5}{1....5} + ...\right.$$

allerdings schliessen können, aber hiemit eine Gleichung erhalten haben, welche nur für den einzelen Werthfall $\varphi = 0$ uns zwischen h^φ und $\cos\varphi$ die Bestimmung $h^\varphi + \cos\varphi = 2.1$ gewähren kann.

§. 4. Wenn wir dagegen in dem h^φ und dessen Abreihung, statt der möglichen Dignität φ, die unmögliche $\varphi\sqrt{-1}$ ansetzen, und dann auch statt des möglichen $\sin\varphi$, den unmöglichen $\sin\varphi\sqrt{-1}$, also in der Abreihung desselben ebenfalls den unmöglichen Bogen $\varphi\sqrt{-1}$ anschreiben: so haben wir zuvörderst folgende drei Gleichungen

$$h^{\varphi\sqrt{-1}} = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\varphi^2}{1.2} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1....4} + \frac{\varphi^5\sqrt{-1}}{1....5} - \frac{\varphi^6}{1....6} ...$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1....4} - \frac{\varphi^6}{1....6} ...$$

$$\sin\varphi\sqrt{-1} = \frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\varphi^5\sqrt{-1}}{1....5} ....$$

---

folglich $h^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$

Wenn wir dann ferner statt der Potenz $h^{\varphi\sqrt{-1}}$ die Potenz $h^{-\varphi\sqrt{-1}}$ ansetzen, so können wir aus

$$h^{-\varphi\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1.\ldots.4} - \frac{\varphi^5\sqrt{-1}}{1.\ldots.5} - \frac{\varphi^6}{1.\ldots.6} \ldots$$

$$\cos\varphi = 1 \qquad - \frac{\varphi^2}{1.2} \qquad + \frac{\varphi^4}{1.\ldots.4} \qquad - \frac{\varphi^6}{1.\ldots.6} \ldots$$

$$-\sin\varphi\sqrt{-1} = -\frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} \qquad + \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} \qquad - \frac{\varphi^5\sqrt{-1}}{1.\ldots.5} \qquad \ldots$$

auf $h^{-\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}$ schliessen; welches zum

obigen $h^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$ addirt,

uns $\dfrac{h^{\varphi\sqrt{-1}} + h^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2} = \cos\varphi$ gibt; und subtrahirt

uns $\dfrac{h^{\varphi\sqrt{-1}} - h^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2.\sqrt{-1}} = \sin\varphi$ gibt

§. 5. Hiemit haben wir diese beiden Ausdrücke des $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, gerade wie in §. 1, ganz unabhängig von den dortigen Gründen, lediglich durch Gebrauch der Reihen für h^z, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi\sqrt{-1}$ erhalten. Da nun $\tang\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ ist, also auch $\tang\varphi\sqrt{-1} = \dfrac{\sin\varphi\sqrt{-1}}{\cos\varphi}$ seyn muss: so können wir auch hieraus auf die Formel

$\tang\varphi\sqrt{-1} = \dfrac{h^{\varphi\sqrt{-1}} - h^{-\varphi\sqrt{-1}}}{h^{\varphi\sqrt{-1}} + h^{-\varphi\sqrt{-1}}}$, und auf viele andere ähnliche Ausdrücke schliessen. Auch würde

sich mit Hülfe der Moivreschen Gleichungen, auf alle diejenigen Formeln zurück schlieſsen lassen, von denen wir im XVIIten Kapitel ausgegangen waren.

§. 6. Die algebraisch unmöglichen Gröſsen sind uns unentbehrlich, weil ohne sie der algebraische Calcul bis zur Unschicklichkeit zerstückelt ausfallen müſste; sie sind auch dadurch nützlich, daſs durch Verbindung mehrer solcher unmöglichen Gröſsen, die Widersprüche sich oftmals wiederum aufheben, und mögliche Resultate einliefern.

Da das trigonometrisch unmögliche, z. B. jede Forderung eines Sinus oder Cosinus, der gröſser als der Halbmesser wäre, oder jede Secante, die kleiner als der Halbmesser seyn soll, vermittelst des algebraisch unmöglichen $\sqrt{-1}$ ausgedrückt werden kann: so wird es schon in dieser Hinsicht für rathsam erkannt werden, auch das trigonometrisch unmögliche calculatorisch zu behandeln.

Da ferner die logarithmischen Unmöglichkeiten sämmtlich darin begründet sind, daſs es den Begriffen der Logarithmik, wegen der mit ihr zu verbindenden algebraischen bejahten Maaſs-Einheit widerspricht, auch verneinte Gröſsen logarithmisch messen zu wollen: so muſs auch diese logarithmische Unmöglichkeit mit der trigonometrischen, vermittelst des algebraisch unmöglichen $\sqrt{-1}$ können verbunden und abgeglichen werden. Durch solche Verbindung hat sich auch für die Integrirung sehr wichtig ergeben, daſs mehre Integrale, wenn sie trigonometrisch unmöglich sich bewiesen, dagegen logarithmisch möglich sich darstellen lieſsen, und umgekehrt als trigonometrisch möglich integrirt werden konnte, was logarithmisch unmöglich war.

Zwanzigstes Capitel.

Schlufsanmerkung; und Gebrauch des Buches betreffend.

§. 1.

Mehres von dem, was ich späterhin noch zu berühren, hie und da in der Differential- und Integralrechnung versprochen habe, hat ungedruckt bleiben müssen, weil es die höchste Zeit geworden war, um das Buch noch als der Ostermesse zugehörig in Verkauf zu bringen, auch die von mir versprochene Bogenzahl überdies schon überschritten ist; das XVIIIte Kapitel aber, den Eulerischen Winkelcalcul betreffend, gerade gegenwärtig von vorzüglichem Nutzen zu seyn schien.

§. 2. Auch über den Gebrauch dieses Lehr- und Handbuches, war ich willens etwas umständlicher mich zu erörtern, als es auf dem noch übrigen Raume dieses Bogens hiemit geschehen kann.

Die Vorerinnerungen werden vermuthlich von geübten Lesern, und besonders von solchen, denen es um Berichtigung und Verbesserung des Lehrvortrages zu thun ist, hintereinander fort sehr gern durchlesen werden. Den ungeübteren Anfängern aber dürfte es gerathener seyn, erst nach und nach sie zu Hülfe zu nehmen, wo sie in dieser Hinsicht citirt sind.

§. 3. Beim ersten Gebrauche dieses Lehrbuches mag der Anfänger, nach sorgfältiger Betreibung des Iten Kapitels, im IIten den §. 5, im IIIten die

§§. 13, 14, 25, 32 und 33, im IVten §. 8 und 9, im Vten §. 11 und 12, im VIten §. 7, 20, 21, 22, 28, 29, 38, 39, 40, 41, im VIIten §. 10 bis mit §. 31, als solche sich bezeichnen, die er bei der ersten Durchgehung dieses Buches überschlagen wolle.

Von dem bis bisher Erlernten, kann nun sogleich eine nützliche und rathsame Anwendung nach Cap. XIV. auf die Tangenten-Lage, und nach Cap. XVI. §. 1 bis 33 auf Maxima und Minima gemacht werden, doch für jetzt, ohne den dortigen zweiten Theil der Auflösung.

Nachdem er dann aber Cap. VIII. §. 1 bis 9, Cap. XV. §. 1 bis 12, Cap. XVI. §. 1 bis 19 sich bekannt, gemacht hat, wird Cap. XVII. aufs neue von ihm nunmehr vollständig durchgenommen, ausser den trigonometrischen Auflösungen, welche er nachzuholen hat, wenn er auch mit Kap. IX. bekannt geworden ist.

Kap. X. §. 1 bis 32 und Kap. XI. §. 1 bis 6 noch hinzugefügt, mag er die übrigen Kapitel der Differentialrechnung, bei diesem seinen ersten Cursus, unberührt lassen; sondern nunmehr von der Integralrechnung das Ite, IIte, IIIte, IVte, Vte und VIte, VIIIte und IXte Kapitel vornehmen.

§. 4. Diese sehr wenigen Hauptlehren von den Anfangsgründen der Differential- und Integralrechnung, wenn sie nur durch die obigen §§en deutlich gefasst, auch durch die darin aufgeführten und mehre selbst gewählte Beispiele gehörig eingeübt sind, werden nun in der That schon hinreichend seyn, um das allermeiste von den Nöthigsten Lehren der höhern Maschinen-Mechanik (deren Druck ich des nächsten werde anfangen lassen) befriedigend zu verstehen. Und hier werde ich auch denenjeni-

gen, welche den höhern Calcul mehr seiner selbst, als seiner Anwendung wegen studiren wollen, angelegentlich rathen müssen, diese Anwendungen auf die höhere Mechanik nicht zu versäumen, oder länger verschieben zu wollen; weil ja der wahrhafte Infinitesimalcalcul nicht etwa lediglich wegen der stetigen geometrischen Gröfsen erfunden ist (um die höheren Lehren der Geometrie ungleich kürzer, deutlicher und genauer zu erweisen und aufzufinden, als es durch die Euklidische Elementargeometrie geschehen konnte, und jemals wirklich geworden seyn würde), sondern neben diesen, und mit ihnen, auch die ebenfalls stetigen Gröfsen der Phoronomie, und die in stetigem Zeitverlaufe stetig *) wirkenden Kräfte in der theoretischen Dynamik ganz vorzüglich geeignet sind, über die eigenthümliche Natur und Unentbehrlichkeit des Infinitesimal-Calculs neues Licht zu verbreiten; vorausgesetzt, dafs die sämmtlichen Lehren der Phoronomie und Dynamik durch unmittelbare Anlegung und Benutzung der calculatorischen Differential- und Integral-Ausdrücke wirklich erwiesen werden, nicht aber, nachdem man vermittelst derselben jene Lehren bereits aufgefunden vor sich hatte, hinterher von beiden, in dem sogenannten strengen Lehrvortrage, lediglich dasjenige aufgeführt, und mit einander verglichen wissen will, was von beiderlei endlichen Resultaten, durch lauter endliche Gröfsen allerdings ausgedrückt werden kann!

Wer dann, nachdem er die vorhin aufgeführten ersten Hauptlehren des Infinitesimalcalculs für solche

---

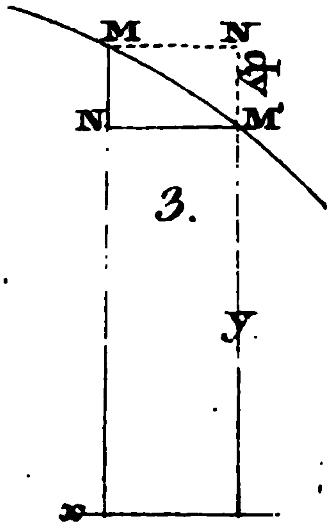
*) Ganz vorzüglich gerade dieser stetigen Gröfsen wegen war es theils nöthwendig, theils doch sehr vernünftig, den Infinitesimal-Calcul zu erfinden.

Phoronomie und Dynamik benutzt hat, fernerhin mit mir oder andern Lehrern, auch einige einzele Maschinen in Untersuchung nehmen will, wird von Zeit zu Zeit Veranlassung finden, auch mit den schwierigen Kapiteln dieser Differential- und Integralrechnung sich bekannt zu machen.

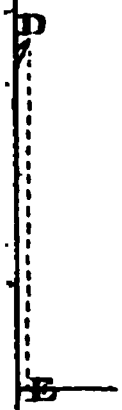
Eine noch ungeheure Menge von schwierigen Untersuchungen und Theorien dieser täglich noch anwachsenden, und immerfort unvollendeten Wissenschaft, würden auch denen noch rückständig bleiben, die sich mit dem ganzen Inhalte meines Lehrbuches bekannt gemacht hätten. Aber sehr viele derselben würde ein theoretischer Maschinist in unserm ökonomischen Teutschlande, wo man nach dem praktischen Nutzen der Theorie zu fragen Ursach hat, dauerhaft geltend schwerlich zu machen wissen!

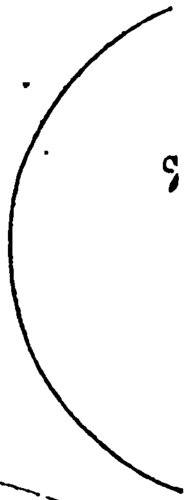
Für einige wenige Fälle dürfte ich auch den Variations-Calcul zu benutzen haben. Was ich schon vorläufig zur Einleitung in denselben hier mitzutheilen willens war, halte ich auch deshalb zurück, weil ich es nicht mehr für druckwürdig anerkennen möchte, nachdem der Hr. Prof. Dirksen in Berlin diesen Calcul auf eine Weise zu behandeln gewufst hat, welche ein neues Licht über denselben zu verbreiten scheint.

Dresden, gedruckt bei Carl Gottlob Gärtner.

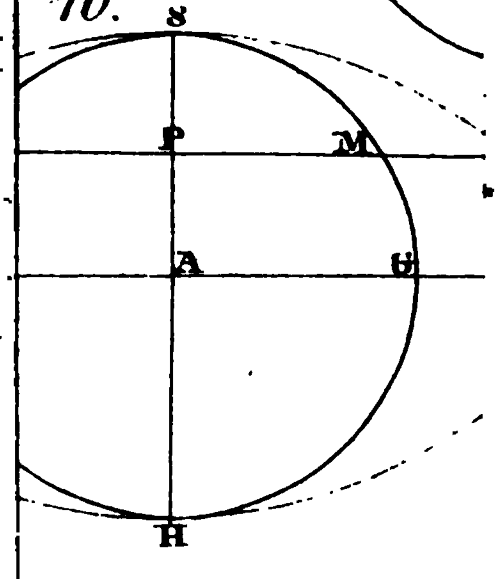


3.

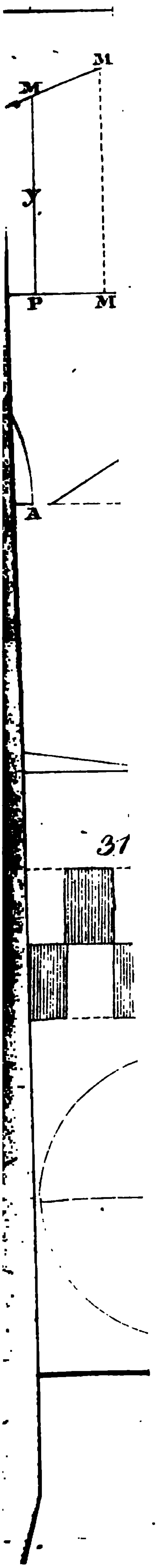




10.



11.


M
M
y
P
M
A
31